Международный университет природы,
общества и человека, «Дубна»
Кафедра биофизики

А. Ю. ПАРХОМЕНКО

ПРАКТИКУМ ПО ВЕКТОРНОМУ И ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ

для специальности
физика

2012

Рецензенты:

«Практикум по векторному и тензорному анализу»/ Сост. А. Ю. Пархоменко. Международный университет природы, общества и человека, «Дубна», 2012, 96 с.

Аннотация

Данное пособие предназначается студентам второго курса по специальности физик-бакалавр. Приводятся решения около 50 типовых задач, которые составляют минимальное количество задач для приобретения необходимых навыков овладения техникой операций векторного анализа и тензорной алгебры. Пособие содержит свыше 700 задач для самостоятельного решения, которые могут быть использованы при составлении контрольных работ. Все они снабжены ответами.

Оглавление

Предисловие **5**

1. Скалярные поля **7**
Основные формулы и определения 7
Практическое занятие 8
Варианты контрольных работ 12

2. Криволинейные и поверхностные интегралы **16**
Основные формулы и определения 16
Практическое занятие 17
Варианты контрольных работ 26

3. Векторные поля **31**
Основные формулы и определения 31
Практическое занятие 32
Варианты контрольных работ 36

4. Векторный анализ в криволинейных координатах **40**
Основные формулы и определения 40
Практическое занятие 41
Варианты контрольных работ 47

5. Интегральные теоремы векторного анализа **52**
Основные формулы и определения 52
Практическое занятие 53
Варианты контрольных работ 59

6. Дифференциальные операции второго порядка **63**
Основные формулы и определения 63
Практическое занятие 64
Варианты контрольных работ 67

7. Специальные виды векторных полей **70**

Основные формулы и определения 70
Практическое занятие 71
Варианты контрольных работ 76

8. Тензорная алгебра **79**
Основные формулы и определения 79
Практическое занятие 79
Варианты контрольных работ 85

9. Тензорная алгебра в криволинейных координатах **89**
Основные формулы и определения 89
Практическое занятие 89
Варианты контрольных работ 98

Ответы **103**
Контрольная работа № 1 103
Контрольная работа № 2 105
Контрольная работа № 3 106
Контрольная работа № 4 107
Контрольная работа № 5 110
Контрольная работа № 6 110
Контрольная работа № 7 112
Контрольная работа № 8 114
Контрольная работа № 9 116

Библиографический список **122**

Предисловие

Пособие посвящено важному разделу математики который в настоящее время включён в основную образовательную программу подготовки бакалавра и является базовой дисциплиной математического и естественнонаучного цикла. Основой пособия послужил курс «Векторный и тензорный анализ», прочитанный студентам IV семестра университета «Дубна» по направлению «Радиационная безопасность человека и окружающей среды»; объем лекций — 34 академических часа, объём семинаров — 17 часов. Основная цель пособия — помочь выработать навыки решения задач векторного анализа и тензорной алгебры для того, чтобы можно было в дальнейшем изучать другие дисциплины, как, например, физику твердого тела, квантовую механику, теорию волновых процессов, ядерную физику и т.д., которые читаются на кафедре «Биофизика».

Пособие состоит из девяти глав (по количеству семинаров), в которых представлены решения задач рассматриваемых на практических занятиях. Все задачи подобраны так, чтобы их разбор не требовал дополнительных сведений из дисциплин, которые ещё не изучались студентами второго курса. При составлении задач использовался материал, содержащийся в сборниках задач [1–5]. По каждому из разделов дается краткое изложение теоретических сведений, включающих основные определения, формулы и теоремы, которые не встречаются при решении задач. Лекционный теоретический материал хорошо изложен в многочисленных учебниках [6–15] и здесь не приводится. В конце каждой главы представлены задачи без решений для самостоятельной домашней работы студентов. Эти задачи представляют собой 15 различных вариантов, которые могут быть использованы преподавателями при составлении контрольных работ. В каждом варианте содержится, как правило, по пять аналогичных задач одинаковой сложности.

Основное внимание уделяется векторному анализу, которому посвящены главы 1—7, главы 8—9 содержат задачи по тензорной алгебре. Многие вопросы в силу ограниченного объёма практических занятий, например, такие как, интегральные операции векторного анализа в криволинейных координатах, теория переменных полей, дифференциальные и интегральные операции над тензорными полями второго ранга здесь не рассматриваются.

В конце пособия приводятся ответы. Пособие может быть полезно студентам физических специальностей.

Глава 1

Скалярные поля

Основные формулы и определения

Скалярным полем называется область пространства, в каждой точке которого определено значение некоторого скаляра, который задается как скалярная функция от радиус-вектора $\mathbf{r}$ текущей точки поля: $u = u\,(\mathbf{r}) = u(x,\, y,\, z)$.

Поверхностью уровня называется геометрическое место точек поля, в которых скаляр поля имеет одно и то же значение: $u(x,\, y,\, z) = const$. В случае двумерного поля понятие поверхности уровня заменяется понятием **линии уровня**: $u(x,\, y) = const$.

Полный дифференциал скалярного поля du можно представить как скалярное произведение двух векторов: $du = \operatorname{grad} u\, dr$. Первый множитель, называемый **градиентом скалярного поля**, зависит лишь от координат точки поля и не зависит от их дифференциалов.

Теорема о градиенте: Градиент в данной точке поля направлен по нормали к поверхности уровня в этой точке (или к линии уровня, если поле плоское).

Производная скалярного поля в данной точке по направлению градиента имеет наибольшее значение и равна модулю градиента, в направлениях касательных к поверхности уровня — равна нулю. Градиент направлен в сторону возрастания функции поля. Эти свойства дают инвариантную характеристику градиента. Они говорят о том, что вектор $\operatorname{grad} u$ указывает направление и величину наибольшего изменения скалярного поля в данной точке.

Пусть $w = f(u,v)$, $u = u(x, y\, z)$ и $v = u(x, y\, z)$ — дифференцируемые функции, $\lambda = \text{const}$, $v \neq 0$, $n \in N$. Тогда:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}\,(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v, &&\operatorname{grad}\,(\lambda+u) = \operatorname{grad} u,\\
&\operatorname{grad}\,(u\cdot v) = v\operatorname{grad} u + u\operatorname{grad} v, &&\operatorname{grad}\,(\lambda u) = \lambda\operatorname{grad} u,\\
&\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\operatorname{grad} u - u\operatorname{grad} v}{v^2}, &&\operatorname{grad}\,(u^n) = nu^{n-1}\operatorname{grad} u,
\end{aligned}$$

$$\operatorname{grad} w = \frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

Практическое занятие

Задача 1.1. 1) Найти величину и направление градиента скалярного поля $u = u\,(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6xy - 6x + 4y + 8z$ в точке $M_0\,(1; 2; 1)$. 2) В какой точке поля градиент равен нулю? 3) В каких точках пространства он перпендикулярен осям координат?

Решение: 1) **Градиентом скалярного поля** u в данной точке M называется вектор $\operatorname{grad} u$, который указывает направление и величину наибольшего изменения скалярного поля в данной точке, обозначается символом $\operatorname{grad} u$ и определяется в декартовой системе координат равенством:

$$\boxed{\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{k}.}$$

Величина градиента поля определяется его модулем:

$$\boxed{|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},}$$

а его направление направляющими косинусами вектора нормали к поверхности уровня в точке M_0:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{|\operatorname{grad} u|}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{|\operatorname{grad} u|}, \quad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{|\operatorname{grad} u|}.$$

Значения частных производных данного скалярного поля в точке M_0 равны: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (6x - 6y - 6)|_{M_0} = -12$,

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (4y-6x+4)|_{M_0} = 6$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (8-8z)|_{M_0} = 0$. Отсюда величина градиента поля в точке M_0: $|\mathrm{grad}u| = \sqrt{(-12)^2+6^2+0} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$. Соответственно направление скалярного поля: $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma = 0$.

2) Для нахождения точки, в которой градиент поля равен нулю, находим частные производные поля u по переменным x, y, z, приравниваем их нулю и решаем полученную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 6x-6y-6=0, \\ 4y-6x+4=0, \\ 8-8z=0. \end{cases}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений имеет вид: $x=0$, $y=-1$, $z=1$. Отсюда, искомая точка имеет координаты $M(0;-1;1)$.

3) Пусть $\mathrm{grad}u \parallel Ox$, тогда $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=0$, переменная x может принимать любые значения $x\in R$, возможные значения переменных y и z находятся из решения системы уравнений: $\begin{cases} 4y-6x+4=0, \\ 8-8z=0. \end{cases}$ Отсюда $y=\dfrac{3}{2}x-1$, $z=1$.

Пусть $\mathrm{grad}u \parallel Oy$, тогда $y\in R$, $\cos\alpha=0$, $\cos\gamma=0$. $\begin{cases} 6x-6y-6=0, \\ 8-8z=0. \end{cases}$ Отсюда $x=y-1$, $z=1$.

Пусть $\mathrm{grad}u \parallel Oz$, тогда $z\in R$, $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=0$. $\begin{cases} 6x-6y-6=0, \\ 4y-6x+4=0. \end{cases}$ Отсюда $x=0$, $y=-1$.

Задача 1.2. Найти производную скалярного поля $u = u(x,y,z)$ из задачи №1 в точке $M_0(2;1;1)$ в направлении градиента поля $v=v(x,y,z)=xy+yz+xz$.

Решение: Производная скалярного поля $u(M)$ в точке M_0 по направлению вектора $\mathbf{s}$ характеризует скорость изменения функции $u(M)$ в направлении вектора $\mathbf{s}$ и равна скалярному произведению градиента поля на единичный вектор данного направления, т. е. равна проекции градиента на данное направление:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}} = (\operatorname{grad} u,\, \mathbf{s}) = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi,$$

где φ — угол между градиентом и вектором $\mathbf{s}$. По условию задачи вектором $\mathbf{s}$ является единичный вектор градиента поля v для которого имеем: $\mathbf{s} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\operatorname{grad} v = (y+z)\,\mathbf{i} + (x+z)\,\mathbf{j} + (y+x)\,\mathbf{k}$. — находятся по формулам:

$$\cos\alpha = \left.\frac{y+z}{|\operatorname{grad} v|}\right|_{M_0} = \frac{2}{\sqrt{22}}, \quad \cos\beta = \left.\frac{x+z}{|\operatorname{grad} v|}\right|_{M_0} = \frac{3}{\sqrt{22}},$$
$$\cos\gamma = \left.\frac{y+x}{|\operatorname{grad} v|}\right|_{M_0} = \frac{3}{\sqrt{22}},$$

$$|\operatorname{grad} v|_{M_0} = \left.\sqrt{(y+z)^2 + (x+z)^2 + (y+x)^2}\right|_{M_0} = \sqrt{22}.$$

Отсюда следует выражение для производной скалярного поля в координатной форме:

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma,}$$

где символы $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}$ означают, что частные производные берутся в точке M_0. Сами частные производные являются производными функции u по направлению координатных осей Ox, Oy, Oz, соответственно. Они были найдены в предыдущей задаче. Найдем значения этих производных в точке M_0:
$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (6 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 6) = 0$, $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (4 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 4) = -4$,
$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (8 - 8 \cdot 1) = 0$. Тогда:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0} = 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{22}} + (-4) \cdot \frac{3}{\sqrt{22}} + 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{22}} = -\frac{12}{\sqrt{22}}.$$

Тот факт, что $\left.\dfrac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0} < 0$, означает, что скалярное поле в точке M_0 в данном направлении убывает.

Задача 1.3. Являются ли ортогональными поверхности уровня скалярных полей u и v из предыдущей задачи?

Решение: Условием ортогональности поверхностей уровня является равенство нулю скалярного произведения градиентов этих полей, т. е. следующее условие: $(\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) = 0$. Таким образом:
$\operatorname{grad} u = (6x - 6y - 6)\,\mathbf{i} + (4y - 6x + 4)\,\mathbf{j} + (8 - 8z)\,\mathbf{k}$,
$\operatorname{grad} v = (y + z)\,\mathbf{i} + (x + z)\,\mathbf{j} + (y + x))\,\mathbf{k}$.
$(\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) = (6x - 6y - 6) \cdot (y + z) + (4y - 6x + 4) \cdot (x + z) + + (8 - 8z) \cdot (y + x) = 12x - 6x^2 + 2y + 10xy - 6y^2 - 2z - 8xz - 10yz \neq 0$. Отсюда следует, что заданные поверхности не являются ортогональными.

Задача 1.4. Найти угол между градиентами поля $u = x^2 + + 2y^2 - z^2$ в точках $P_1(2;3;-1)$ и $P_2(1;-1;2)$.

Решение: Находим градиенты функции u в заданных точках P_1 и P_2: $\operatorname{grad} u|_{P_1} = 2x\,\mathbf{i} + 4y\,\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}|_{P_1} = 4\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$. $\operatorname{grad} u|_{P_2} = 2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$. Угол φ между найденными значениями градиентов функции u определяется из равенства:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\operatorname{grad} u|_{P_1}, \operatorname{grad} u|_{P_2}\right)}{|\operatorname{grad} u|_{P_1} \cdot |\operatorname{grad} u|_{P_2}}.$$

Отсюда: $\cos\varphi = \dfrac{4 \cdot 2 + 12 \cdot (-4) + 2 \cdot (-4)}{\sqrt{164}\sqrt{36}} = -\dfrac{48}{12\sqrt{41}} = -\dfrac{4}{\sqrt{41}}$.

Задача 1.5. Найти градиент функции $u = \sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$ в точке $P\,(1;3;2)$.

Решение: Функцию u можно представить в виде $u(\varphi)$, где $\varphi = \varphi\,(x, y, z)$ — дифференцируемая функция. Пусть $u(\varphi)$

имеет производную по φ. Тогда градиент такой функции можно вычислять по формуле:

$$\boxed{\operatorname{grad} u(\varphi) = \frac{du}{d\varphi} \operatorname{grad} \varphi.}$$

Полагаем $\varphi = x^3 + y^3 + z^3$. Тогда $u(\varphi) = \sqrt{\varphi}$, $(u(\varphi))'_\varphi = $ $= \dfrac{1}{2\sqrt{\varphi}}$. Пусть система координат декартовая. Найдём градиент: $\operatorname{grad} \varphi = 3x^2\,\mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j} + 3z^2\,\mathbf{k}$. Отсюда находим градиент функции в точке P:

$$\operatorname{grad} u(\varphi) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3+z^3}}\,\mathbf{i} + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3+z^3}}\,\mathbf{j} + \\ + \frac{3z^2}{2\sqrt{x^3+y^3+z^3}}\,\mathbf{k}.$$

$$\operatorname{grad} u(\varphi)|_P = \frac{3}{2\sqrt{36}}\,\mathbf{i} + \frac{27}{2\sqrt{36}}\,\mathbf{j} + \frac{12}{2\sqrt{36}}\,\mathbf{k} = \frac{1}{4}\,\mathbf{i} + \frac{9}{4}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Варианты контрольных работ

Задача 1.1. *Найти величину и направление градиента поля в точке $A\,(1;1;1)$. В какой точке градиент поля равен нулю? В каких точках пространства он перпендикулярен осям координат?*

1. $u = x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2 + x\,y + 3\,x - 2\,y - 6\,z.$
2. $u = x^2 + y^2 + 2\,z^2 + 2\,xy - 6\,x - 6\,y - 4\,z.$
3. $u = 3\,x^2 - y^2 + z^2 - 4\,xy - 4\,x + 12\,y - 6\,z.$
4. $u = 2\,x^2 + y^2 + 6\,z^2 + 3\,xy + x + y + 12\,z.$
5. $u = 4\,x^2 + 2\,y^2 - 3\,z^2 - 2\,xy - 2\,x - 10\,y + 12\,z.$
6. $u = x^2 + 4\,y^2 + 6\,z^2 - 2\,xy - 6\,z.$
7. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x + 2\,y - 4\,z - 10.$
8. $u = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2\,x + 2\,y + 2\,z.$
9. $u = x^2 + 5\,y^2 + 4\,z^2 - 4\,yz - 6\,x - 6\,y - 4\,z.$
10. $u = 2\,x^2 + 5\,y^2 + 3\,z^2 - 5\,yz - 4\,x - 5\,y - 8\,z.$

11. $u = 3\,x^2 - 3\,y^2 - 4\,z^2 + 10\,yz + 6\,x + 8\,y - 22\,z.$
12. $u = 3\,x^2 + y^2 + 2\,z^2 - 7\,xz + 2\,x - 8\,y + 6\,z.$
13. $u = -x^2 + 5\,y^2 - 3\,z^2 + 2\,xz + 2\,x + 10\,y + 6\,z.$
14. $u = x^2 + 4\,y^2 - 2\,z^2 + 2\,xz - 10\,x - 16\,y - 4\,z.$
15. $u = -2\,x^2 + 2\,y^2 + z^2 - 3\,xz + x - 12\,y - 12\,z.$

Задача 1.2. *Найти производную скалярного поля* $u = u(x,\,y,\,z)$ *в направлении градиента поля* $v = v(x,\,y,\,z)$ *в точке* A.

1. $u = -2x^2 + 2y^2 + z^2 - 3xz + x + 12y - 12z,\ \ v = xy - 2yz + 3xz,$ $A(2;1;1).$
2. $u = x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 2xz - 10x - 16y - 4z,\ \ v = x^2 + y^2 + z^2,$ $A(3;4;0).$
3. $u = -x^2 + 5y^2 - 3z^2 + 2xz + 2x + 10y + 6z,\ \ v = 2x^2y^2z^2,$ $A(1;-1;1).$
4. $u = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 7xz + 2x - 8y + 6z,\ \ v = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x},$ $A(1;1/2;1).$
5. $u = 3x^2 - 3y^2 - 4z^2 + 10yz + 6x + 8y - 22z,\ v = xy^2 + yz^2 - xyz,$ $A(-1;2;1).$
6. $u = 2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 5yz - 4x - 5y - 8z,\ v = x^2yz + xy^2z - xyz^2,$ $A(1;-1;1).$
7. $u = x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 4yz - 6x - 6y - 4z,\ \ v = (x + y + z)^2\,,$ $A(3;2;1).$
8. $u = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z,\ v = x^3 + y^3 - z^3,$ $A(2;-2;2).$
9. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 10,\ \ v = x^2z + y^2z - xyz^2,$ $A(2;3;1).$
10. $u = x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 2xy - 6z,\quad v = x^3 + y^3 + z^3,\qquad A(3;3;3).$
11. $u = 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 2xy - 2x - 10y + 12z,\ v = \ln\left(2x + y + 3z\right),$ $A(-2;-1;2).$
12. $u = 2x^2 + y^2 + 6z^2 + 3xy + x + y + 12z,\ \ v = \ln\left(xyz\right),\ \ A(2;3;1).$
13. $u = 3x^2 - y^2 + z^2 - 4yx - 4x + 12y - 6z,\ \ v = \sqrt{x + y + z},$ $A(2;3;1).$
14. $u = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 6x - 6y - 4z,\ v = 2x^2 - y^2 + 4z^2 - xyz,$ $A(1;-3;-1).$

15. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$, $v = y^2 - x^2 - z^2$, $A(0;4;3)$.

Задача 1.3. *Являются ли ортогональными поверхности уровня заданных скалярных полей?*

1. $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = xz + yz$.
2. $u = x^2 + y^2 - 2z^2$, $v = xyz$.
3. $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = xz - zy$.
4. $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, $v = \ln\left(\dfrac{xz}{y^2}\right)$.
5. $u = 2y^2 + z^2 - x^2$, $v = \ln\left(x^2\left(y+z\right)\right)$.
6. $u = x^2 + z^2 - 2\,y^2$, $v = \ln\left(xyz\right)$.
7. $u = 2\,x^2 + 2\,z^2 - y^2$, $v = 3\,xy^2 + 4\,zy^2$.
8. $u = 2\,y^2 - 4\,x^2 - 4\,z^2$, $v = xy^2 - zy^2$.
9. $u = 4\,x^2 + 4\,z^2 - 4\,y^2$, $v = 7\,yx + 8\,yz$.
10. $u = 4\,x^2 - 2\,z^2 + 4\,y^2$, $v = 2\,xz^2 + 2\,yz^2$.
11. $u = z^2 - 2\,x^2 - 2\,y^2$, $v = 3\,xz^2 - 3\,yz^2$.
12. $u = 3\,z^2 - 3\,x^2 - 3\,y^2$, $v = 2\,xz - 5\,yz$.
13. $u = 2\,x^2 + 2\,y^2 - 2\,z^2$, $v = 5\,xz + 4\,yz$.
14. $u = z^2 - 2\,x^2 - 2\,y^2$, $v = yz^2 - xz^2$.
15. $u = 2\,x^2 - y^2 + 2\,z^2$, $v = \ln\left(y^2\left(x+z\right)\right)$.

Задача 1.4. *Найти угол между градиентами поля u в точках P_1 и P_2, либо угол между градиентами функций u и v в точке M_1.*

1. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $P_1\left(1;1\right)$, $P_2\left(-1;-1\right)$.
2. $u = \left(x+y\right)e^{x+y}$, $P_1\left(0;0\right)$, $P_2\left(-1;1\right)$.
3. $u = xy^2 - xyz + yz^2$, $P_1\left(-1;2;0\right)$, $P_2\left(-1;1;-1\right)$.
4. $u = \ln\left(xyz\right)$, $P_1\left(2;-2;1\right)$, $P_2\left(1;2;-2\right)$.
5. $u = \ln\left(2x + y + 3z\right)$, $P_1\left(1;-3;-1\right)$, $P_2\left(1;1;0\right)$.
6. $u = \sqrt{x+y+z}$, $P_1\left(2;3;4\right)$, $P_2\left(1;2;1\right)$.
7. $u = \left(x+y+z\right)^2$, $P_1\left(3;2;1\right)$, $P_2\left(1;1;-1\right)$.
8. $u = xy + 3xz - 2yz$, $P_1\left(2;1;1\right)$, $P_2\left(1;3;0\right)$.
9. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $v = \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $M_1\left(0;0;1\right)$.
10. $u = \sqrt{x^2+y^2}$, $v = x + y + \sqrt{xy}$, $M_1\left(1;1\right)$.

11. $u = y^2 - x^2 - z^2, \quad v = \ln(3x + 5y + z), \qquad M_1(1;1;2)$.
12. $u = x^3 + y^3 - z^3, \quad v = x^2 + y^2 + z^2, \qquad M_1(1;1;-1)$.
13. $u = \sqrt{xy} + z^2, \quad v = x^2 + \sqrt{yz}, \qquad M_1(1;1;1)$.
14. $u = \sqrt{x + yz}, \quad v = \ln\left(2x - z^2\right), \qquad M_1(1;0;-1)$.
15. $u = \sqrt{(x-y)\,z}, \quad v = x^2 + yz, \qquad M_1(2;1;4)$.

Задача 1.5. *Найти градиент функции u в точке P_0.*

1. $u = \ln\sin(x + y + z), \quad P_0 = \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.
2. $u = \ln(xyz), \quad P_0 = (1;1;1)$.
3. $u = \ln\cos(x + yz), \quad P_0 = \left(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}; 1\right)$.
4. $u = \cos\ln(x + y + z), \quad P_0 = (1;1;-1)$.
5. $u = \ln^3(x + y + z), \quad P_0 = (1;-1;1)$.
6. $u = \operatorname{arctg} e^{x+y+z}, \quad P_0 = (1;-2;1)$.
7. $u = \operatorname{arctg}\sqrt{x + y + z}, \quad P_0 = (2;1;1)$.
8. $u = \arcsin\sqrt{xyz}, \quad P_0 = \left(1;1;\frac{3}{4}\right)$.
9. $u = \ln\operatorname{tg}(x + y + z), \quad P_0 = \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.
10. $u = \ln\left(1 + \operatorname{tg}^2(x + y + z)\right), \quad P_0 = \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.
11. $u = \ln\operatorname{ctg}(x + y + z), \quad P_0 = \left(\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right)$.
12. $u = \arccos\sqrt{x + y + z}, \quad P_0 = \left(1;-1;\frac{1}{4}\right)$.
13. $u = \sqrt{\cos(x + y + z)}, \quad P_0 = \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.
14. $u = \ln\cos^2(x + y + z), \quad P_0 = \left(\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.
15. $u = \ln\left(1 + e^{2(x+y+z)}\right), \quad P_0 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

Глава 2

Криволинейные и поверхностные интегралы

Основные формулы и определения

Криволинейными называются интегралы от функций, заданных вдоль кривых на плоскости или в пространстве. Областью интегрирования является дуга кусочно-гладкой кривой (направленный отрезок линии в пространстве). Криволинейные и поверхностные интегралы обладают свойствами аналогичными свойствам обыкновенных определенных интегралов. Если подынтегральной является скалярная функция, такой интеграл называется интегралом I рода, если векторная функция — интегралом II рода.

Интеграл II рода зависит от ориентации кривой интегрирования L: при изменении ориентации этой кривой интеграл меняет знак. Для замкнутого контура, не имеющего точек самопересечения, можно указать два направления обхода: против часовой стрелки (положительная ориентация) и по часовой стрелке (отрицательная ориентация).

Если уравнения дуги заданы в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ интеграл II рода сводится к обыкновенному определенному интегралу по формуле:

$$\int\limits_L a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} (a_x\,\dot{x}(t) + a_y\,\dot{y}(t) + a_z\dot{z}(t))\,dt,$$

где компоненты поля имеют вид: $a_x = a_x(x(t), y(t), z(t))$, $a_y = a_y(x(t), y(t), z(t))$, $a_z = a_z(x(t), y(t), z(t))$.

Вычисление поверхностного интеграла I рода сводится к вычислению обычного двойного интеграла. Если уравнение поверхности имеет вид $z = f(x,\, y)$, а область S проектируется на плоскость Oxy в область D, тогда:

$$\iint\limits_S u\,(x,\,y,\,z)\,d\sigma = \iint\limits_D u\,(x,\,y,\,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Вместо плоскости Oxy поверхность S можно проектировать на плоскости Oxz или Oyz.

Вычисление поверхностного интеграла II рода сводится к вычислению интеграла I рода:

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\,\mathbf{n}^\circ)\;d\sigma = \iint\limits_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\;d\sigma,$$

где $\mathbf{n}^\circ = (\cos\alpha,\,\cos\beta,\,\cos\gamma)$ — единичная нормаль к поверхности, или к вычислению суммы трех двойных интегралов:

$$\iint\limits_S (\mathbf{a},\,d\sigma) = \iint\limits_{D_1} a_x\,(x(y,\,z),\,y,\,z)\,dydz+$$
$$+\iint\limits_{D_2} a_y\,(x,\,y(x,\,z),\,z)\,dxdz + \iint\limits_{D_3} a_z\,(x,\,y,\,z(x,\,y))\,dxdy,$$

где D_1 D_2 D_3 — проекции S соответственно на плоскости Oyz, Oxz, Oxy, а $x(y,\,z)$ $y(x,\,z)$ $z(x,\,y)$ — выражения, полученные из уравнения поверхности S разрешением относительно соответствующих координат.

Практическое занятие

Задача 2.1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по дуге, заданной параметрическими уравнениями:

$$\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)\,dl,\;\; x = e^t\cos t,\;\; y = e^t\sin t,\;\; z = e^t,\;\; t\in\left[0,\,\frac{1}{3}\right].$$

Решение: Вычисление интеграла первого рода сводится к вычислению обыкновенного определённого интеграла. В нашем случае уравнение дуги L задано в параметрической форме: $x = x(t),\; y = y(t),\; z = z(t),\quad t\in[t_1,\,t_2]$. Тогда:

$$\int\limits_L f(M)\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\,dt.$$

Подынтегральная функция в новой переменной t будет иметь вид: $x^2 + y^2 + z^2 = e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t} = 2e^{2t}$. Вычислим дифференциал длины дуги кривой: $\dot{x}(t) = e^t\cos t - e^t\sin t$, $(\dot{x}(t))^2 = e^{2t}(1-\sin 2t)$, $\dot{y}(t) = e^t\sin t + e^t\cos t$, $(\dot{y}(t))^2 = e^{2t}(1+\sin 2t)$, $\dot{z}(t) = e^t$, $(\dot{z}(t))^2 = e^{2t}$. Тогда: $d\,l = \sqrt{e^{2t}(1-\sin 2t) + e^{2t}(1+\sin 2t) + e^{2t}}\,dt = \sqrt{3}e^t$. Подставляя найденные выражения в интеграл получаем:

$$\int\limits_L \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\,dl = \int\limits_0^{1/3} 2\sqrt{3}e^{3t}\,dt = \frac{2(e-1)}{\sqrt{3}}.$$

Задача 2.2. 1) Вычислить площадь поверхности, ограниченной треугольной площадкой с вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;5;0)$, $C(0;0;5)$, 2) Вычислить поверхностный интеграл первого рода:

$$\iint\limits_S (2x - y + z)\,d\sigma.$$

Решение: 1) Искомая площадь поверхности — это площадь треугольника $\triangle ABC$. Уравнением поверхности будет уравнение плоскости, в которой лежит $\triangle ABC$. Из точки можно провести два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеющие координаты: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1)$. Проведём из точки A третий вектор в т. $M(x, y, z)$ — произвольная точка на той же плоскости. Воспользуемся условием компланарности трёх векторов — определитель, составленный из координат этих векторов должен быть равен нулю, если все три вектора лежат в одной плоскости. Отсюда получаем:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляя сюда координаты точек получаем искомое уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5x + y + z - 5 = 0.$$

Или $z = 5 - 5x - y$. Площадь поверхности ищется по формуле: $S_\triangle = \iint\limits_S d\sigma$, S — область интегрирования (искомая поверхность). Поверхностный интеграл можно свести к двойному интегралу, спроектировав его на одну из координатных плоскостей, например xOy. Тогда: $S_\triangle = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$, где область D — есть треугольник $\triangle OAB$. В свою очередь двойной интеграл сводится к повторным интегралам. Пусть последнее интегрирование проводится по переменной x. Так как была сделана проекция $\triangle ABC$ на $\triangle OAB$ в уравнении поверхности следует положить $z = 0$. Тогда: $5x + y = 5$. Отсюда находим области интегрирования: $0 \leqslant y \leqslant 5 - 5x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда: $S_\triangle = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{5-5x} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dy$, где $z'_x = (5 - 5x - y)'_x = -5$, $z'_y = (5 - 5x - y)'_y = -1$, $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + 25 + 1} = 3\sqrt{3}$. Подставляя в полученный интеграл находим:

$$S_\triangle = 3\sqrt{3} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{5-5x} dy = 3\sqrt{3} \int\limits_0^1 (5 - 5x)\, dx = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ (кв. ед.)}$$

При вычислении поверхностного интеграла можно было бы делать проекцию на другую координатную плоскость, например xOz. В этом случае $\triangle ABC$ проектируется на $\triangle OAC$. В уравнении поверхности следует положить $y = 0$ и областью интегрирования будут неравенства: $0 \leqslant z \leqslant 5 - 5x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. С точностью до замены $y \to z$ мы получили тот же интеграл.

Можно сделать также проекцию $\triangle ABC$ на плоскость yOz. Тогда получим $\triangle OBC$. Здесь в уравнении поверхности $\left(x = 1 - \dfrac{y}{5} - \dfrac{z}{5}\right)$ надо положить $x = 0$, т.е. $y + z = 5$.

Если второе интегрирование проводить по переменной y, то областями интегрирования в повторных интегралах будут неравенства: $0 \leqslant y \leqslant 5$, $0 \leqslant z \leqslant 5-y$. Тогда площадь поверхности вычисляется по формуле: $S_{\triangle} = \int\limits_0^5 dy \int\limits_0^{5-y} \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}dz$, где $x'_y = \left(1-\dfrac{y}{5}-\dfrac{z}{5}\right)'_y = -\dfrac{1}{5}$, $x'_z = \left(1-\dfrac{y}{5}-\dfrac{z}{5}\right)'_z = -\dfrac{1}{5}$, отсюда $\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{5}$. Подставляя в полученный интеграл находим:

$$S_{\triangle} = \frac{3\sqrt{3}}{5}\int\limits_0^5 dy \int\limits_0^{5-y} dz = \frac{3\sqrt{3}}{5}\int\limits_0^5 (5-y)\,dy = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ (кв. ед.)}$$

2) Запишем заданный интеграл в виде повторных интегралов, используя решение предыдущей задачи:

$$\iint\limits_S (2x-y+z)\,d\sigma = 3\sqrt{3}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{5-5x} (2x-y+z)\,dy =$$

$$= |z = 5-5x-y| = 3\sqrt{3}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{5-5x} (5-3x-2y) =$$

$$= 30\sqrt{3}\int\limits_0^1 \left(x-x^2\right)dx = 5\sqrt{3}.$$

Задача 2.3. Вычислить работу силового поля $\mathbf{F} = \dfrac{-y\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}}{x^2+y^2} + z\,\mathbf{k}$ при перемещении материальной точки вдоль витка винтовой линии из точки $t_1 = 0$ в точку $t_2 = 2\pi$ в направлении возрастания параметра t.

Решение: Запишем параметрическое уравнение винтовой линии:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \qquad a = const,\ b = const,\ h = const,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \\ z = ht, \end{cases}$$

Отсюда: $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = a\cos t\,dt$, $dz = h\,dt$. Найдём выражения компонент векторного поля в новых обозначениях: $a_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{\sin t}{a}$, $a_y = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{\cos t}{a}$, $a_z = ht$.

Работа силового поля A представляет собой криволинейный интеграл второго рода и вычисляется по формуле:

$$\boxed{A = \int\limits_L \mathbf{a}d\mathbf{r} = \int\limits_L a_x dx + a_y dy + a_z dz.}$$

Тогда: $A = \int\limits_0^{2\pi} \left(1 + h^2 t\right) dt = 2\pi \left(1 + \pi h^2\right).$

Задача 2.4. 1) Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$ вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ с отрицательным направлением обхода. 2) Вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = \left(xy + x^2 + y^2\right)\mathbf{i} + \left(x^2 - y^2\right)\mathbf{j}$ вдоль замкнутого контура L с положительным направлением обхода. Замкнутый контур L образует треугольник OAB с вершинами $O(0;0)$, $A(1;2)$, $B(0;2)$.

Решение: 1) Циркуляцию векторного поля будем искать по формуле:

$$\boxed{C(\mathbf{a}) = \oint\limits_L \mathbf{a}\,d\,\mathbf{r} = \oint\limits_L a_x dx + a_y dy.}$$

где a_x и a_y — соответствующие компоненты векторного поля $\mathbf{a}$. Запишем параметрическое уравнение эллипса:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Отсюда следует: $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = b\cos t\,dt$, $a_x = y = b\sin t$, $a_y = -x = -a\cos t$. Подставляя найденные значения в выражение для циркуляции получаем: $a_x dx + a_y dy = -ab\sin^2 t - ab\cos^2 t = -ab$:

$$C(\mathbf{a}) = -\int\limits_0^{2\pi}(-ab)dt = 2\pi ab.$$

2) Кривая L составлена из трёх ориентированных гладких кривых, а именно, отрезков $[OA]$, $[AB]$ и $[BO]$. Запишем уравнения этих отрезков. Для $[OA]$ составляем уравнение прямой, проходящее через две заданные точки: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$, $y_1 = 0$, $x_1 = 0$, $y_2 = 2$, $x_2 = 1$, отсюда следует: $y/2 = x$ или $y = 2x$. Тогда: $OA = \{x = x,\ y = 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

Аналогично находим уравнения для отрезков $[AB]$ и $[BO]$. $AB = \{x = x,\ y = 2,\ x \in [1, 0]\}$, $dy = 0$, $BO = \{x = 0,\ y = y,\ y \in [2, 0]\}$, $dx = 0$. Здесь границы отрезков заданы в соответствии с направлением обхода контура. Разобьём интеграл на сумму трёх интегралов:

$$C = \oint\limits_L \mathbf{a}\,d\,\mathbf{r} = \int\limits_{OA} \mathbf{a}\,d\,\mathbf{r} + \int\limits_{AB} \mathbf{a}\,d\,\mathbf{r} + \int\limits_{BO} \mathbf{a}\,d\,\mathbf{r}.$$

и вычислим их на каждом отрезке в отдельности.

На $[OA]$ дифференцирование проводится по переменной x. Значит: $dy = 2dx$. Отсюда: $\left(x^2+y^2+xy\right)dx + \left(x^2-y^2\right)dy = \left(x^2+4x^2+2\,x^2\right)dx + 2\left(x^2-4\,x^2\right)dx = x^2dx$.

На $[AB]$: $\left(x^2+y^2+xy\right)dx + \left(x^2-y^2\right)dy = \left(x^2+2x+4\right)dx$.

На $[BO]$: $\left(x^2+y^2+xy\right)dx + \left(x^2-y^2\right)dy = -y^2dy$.

Следовательно, циркуляция C векторного поля $\mathbf{a}$ будет:

$$C = \oint\limits_L \mathbf{a}\,d\,\mathbf{r} = \int\limits_0^1 x^2dx + \int\limits_1^0 \left(x^2+2x+4\right)dx - \int\limits_2^0 y^2dy = -\frac{7}{3}.$$

Задача 2.5. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = 2\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + 5z\,\mathbf{k}$ через поверхность, заданную треугольной площадкой с вершинами в точках $A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;2)$ в направлении внешней нормали.

Решение: Пусть S — ориентированная поверхность, расположенная в области V, в которой задано векторное поле $\mathbf{a}$. Поверхностный интеграл:

$$\boxed{\Pi = \iint\limits_S \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \iint\limits_S (\mathbf{a},\, \mathbf{n}^\circ)\ dS.}$$

называется **потоком векторного поля a** через заданную сторону поверхности S. В нашей задаче уравнением поверхности является уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A, B, C: $x + 2y + 3z - 6 = 0$. Отсюда имеем: $z = -\dfrac{1}{3}x - -\dfrac{2}{3}y + 2$. Так как поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то единичный вектор нормали к ней вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathbf{n}^\circ = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\pm\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.}$$

Здесь знак $(+)$ соответствует верхней стороне поверхности, $(-)$ — нижней. По условию нашей задачи надо взять $(+)$. Тогда направляющие косинусы нормального вектора будут:

$$\cos\alpha = \frac{1/3}{\sqrt{1 + 1/9 + 4/9}} = \frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\beta = \frac{2/3}{\sqrt{1 + 1/9 + 4/9}} = \frac{2}{\sqrt{14}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/9 + 4/9}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Следовательно $\mathbf{n}^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k})$. Найдём скалярное произведение: $(\mathbf{a},\, \mathbf{n}^\circ) = \dfrac{2}{\sqrt{14}} - \dfrac{2x}{\sqrt{14}} + \dfrac{15z}{\sqrt{14}}$. Отсюда получаем:

$$\iint\limits_S \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{14}} \iint\limits_S (2 - 2x + 15z)\ dS.$$

Спроектируем поверхность S на плоскость xOy и заменим поверхностный интеграл первого рода двойным интегралом:

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{14}} \iint\limits_P \left(2 - 2x + 15\left(2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\right) \frac{\sqrt{14}}{3}\, dxdy.$$

При вычислении двойного интеграла по области P переходим к повторному интегралу. Найдём пределы интегрирования: $0 \ll x \ll 6$, так как $z = 0$, отсюда следует: $x + 2y = 6$, $y = 3 - x/2$, т. е. $0 \leqslant y \leqslant 3 - x/2$. Тогда:

$$\Pi = \frac{1}{3} \int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{3-x/2} (32 - 7x - 10y)\, dy = 24.$$

Задача 2.6. Для векторного поля $\mathbf{a} = z\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$ найти поток через всю поверхность тетраэдра с вершинами в точках $O\,(0,0,0)$, $A\,(2,0,0)$, $B\,(0,3,0)$, $C\,(0,0,6)$ в направлении внешней нормали.

Решение: Так как поверхность состоит из четырёх треугольников: ABC, ACO, OCB, AOB, то поток векторного поля $\mathbf{a}$ равен:

$$\Pi = \iint\limits_{\triangle ABC} (\mathbf{a},\, \mathbf{n}^\circ)\, dS + \iint\limits_{\triangle ACO} (\mathbf{a},\, \mathbf{n}^\circ)\, dS + \\ + \iint\limits_{\triangle OCB} (\mathbf{a},\, \mathbf{n}^\circ)\, dS + \iint\limits_{\triangle AOB} (\mathbf{a},\, \mathbf{n}^\circ)\, dS.$$

Рассмотрим $\triangle ABC$. Найдём единичный вектор нормали к верхней стороне его поверхности:

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \mathbf{n}^\circ = \frac{1}{\sqrt{14}}\,(3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,.$$

Уравнение плоскости, в которой лежит треугольник $\triangle ABC$ имеет вид: $3x + 2y + z = 6$. Откуда: $z = 6 - 3x - 2y$. Тогда скалярное произведение:

$$(\mathbf{a},\,\mathbf{n}^\circ)=\frac{1}{\sqrt{14}}\,(3z-2y+2z)=\frac{1}{\sqrt{14}}\,(5z-2y)\,.$$

Вычислим поток векторного поля через $\triangle ABC$: $\Pi_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\iint\limits_{\triangle ABC}(5z-2y)\,dS$. Проектируя треугольник ABC на плоскость xOy и заменяя поверхностный интеграл двойным, взятым по области P, являющейся проекцией $\triangle ABC$ на плоскость xOy, получаем:

$$\Pi_1 = 3\iint\limits_{P}(10-5x-4y)\,dxdy =$$

$$= -3\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-(3/2)x}(5x+4y-10)\,dy = 24.$$

Треугольник ACO лежит в плоскости xOz, уравнение которой $y=0$. Единичный вектор нормали к этой плоскости равен: $\mathbf{n}^\circ = -\,\mathbf{j}$. Отсюда следует: $(\mathbf{a},\,\mathbf{n}^\circ)=z\cdot 0+(-y)\cdot(-1)+2z\cdot 0=y$.

$$\Pi_2=\iint\limits_{\triangle ACO} ydS=\iint\limits_{\triangle ACO} 0dxdz=0.$$

Треугольник OCB расположен в плоскости yOz, уравнение которой $x=0$. Единичным вектором нормали к выбранной стороне является вектор $\mathbf{n}^\circ = -\,\mathbf{i}$. Отсюда следует: $(\mathbf{a},\,\mathbf{n}^\circ) = z\cdot(-1)+(-y)\cdot 0+2z\cdot 0=-z$.

$$\Pi_3=\iint\limits_{\triangle OCB}(\mathbf{a},\,\mathbf{n}^\circ)\;dS=-\iint\limits_{\triangle OCB} zdydz=-\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{6-2y} zdz=-18.$$

Треугольник AOB расположен в плоскости xOy, уравнение которой $z=0$. В качестве единичного вектора нормали надо взять вектор $\mathbf{n}^\circ = -\,\mathbf{k}$. Отсюда следует: $(\mathbf{a},\,\mathbf{n}^\circ)=z\cdot 0+(-y)\cdot 0+2z\cdot(-1)=-2z$.

$$\Pi_4 = -2 \iint\limits_{\triangle AOB} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^\circ)\ dS = -2 \iint\limits_{\triangle AOB} z dx dy = \iint\limits_{\triangle AOB} 0 dx dy = 0.$$

Таким образом, искомый поток равен: $\Pi = 24 + 0 - 18 + 0 = 6$.

Варианты контрольных работ

Задача 2.1. *Вычислить криволинейный интеграл первого рода по дуге, заданной параметрическими уравнениями.*

1. $\displaystyle\int\limits_L \frac{y}{x+3z}\, dl, \quad x = t, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} t^2, \quad z = \frac{t^3}{3}, \quad t \in [0, \sqrt{2}].$

2. $\displaystyle\int\limits_L \frac{x+y}{z^2} dl, \ x = \frac{\sqrt{3}}{3} e^t \cos t, \ y = \frac{\sqrt{3}}{3} e^t \sin t, \ z = \frac{\sqrt{3}}{3} e^t, \ t \in [0, \pi].$

3. $\displaystyle\int\limits_L \left(x^2 + y^2 + z\right)\ dl, \ x = \sqrt{t} \cos\ t, \ y = \sqrt{t} \sin\ t, \ z = t, \ t \in [0, 1].$

4. $\displaystyle\int\limits_L \frac{z^2}{x^2+y^2} dl, \ x = e^{-t} \cos t, \ y = e^{-t} \sin t, \ z = e^{-t}, \ t \in [0, +\infty).$

5. $\displaystyle\int\limits_L \left(x^2 + y^2 - z^2\right) dl, \quad x = 4 \sin t, \ y = 4 \cos t, \ z = 3t, \ t \in [0, 3].$

6. $\displaystyle\int\limits_L \left(x^2 + y^2 - 2z^2\right) dl, \ x = t \sin t, \ y = t \cos t, \ z = 2\frac{\sqrt{2}}{3} t^{3/2}, \ t \in [0, 1].$

7. $\displaystyle\int\limits_L \left(x^2 + yz\right)\ dl, \quad x = t, \ y = t^2, \ z = \frac{2t^3}{3}, \quad t \in [0, 1].$

8. $\displaystyle\int\limits_L (x + y + z)\, dl, \quad x = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t, \ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \ z = 2 \sin \frac{t}{2},$

$t \in [0, \pi].$

9. $\displaystyle\int\limits_L \left(\frac{x^2}{y^2} + z^2\right) dl, \quad x = 2\,(1 + \cos t)\,, \ y = 2 \sin t, \ z = 4, \ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$

10. $\displaystyle\int\limits_L \left(x^2 - y^2 + z^2\right) dl, \ x = 6 \sin t, \ y = 6 \cos t, \ z = 8t, \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

11. $\int\limits_L (zx+yz)\,dl,\ x=\dfrac{(t-\sin t)}{2},\ y=\dfrac{(1-\cos t)}{2},\ z=2\cos\dfrac{t}{2},\ t\in[0,2\pi].$

12. $\int\limits_L \dfrac{x^2+y^2}{z^3}\,dl,\ x=\sqrt{3}e^t\cos t,\ y=\sqrt{3}e^t\sin t,\ z=\sqrt{3}e^t,\ t\in[0,1].$

13. $\int\limits_L \dfrac{y^2+x^3}{z}\,dl,\qquad x=t,\ y=\dfrac{t^2}{\sqrt{2}},\ z=\dfrac{t^3}{3},\quad t\in[1,2].$

14. $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z\right)dl,\ x=2\sqrt{t}\cos t,\ y=2\sqrt{t}\sin t,\ z=2t,\ t\in[0,1].$

15. $\int\limits_L \left(\dfrac{x}{y}+z\right)dl,\quad x=3\sin t,\ y=3\cos t,\ z=4t,\quad t\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right].$

Задача 2.2. 1) *Вычислить площадь поверхности, ограниченной треугольной площадкой S с вершинами A, B, C.* 2) *Вычислить поверхностный интеграл первого рода:*

1. $\iint\limits_S (xy+yz+xz)\,d\sigma,\qquad A(4;0;0),\ B(0;4;0),\ C(0;0;8).$

2. $\iint\limits_S xyz\,d\sigma,\qquad A(2;0;0),\ B(0;2;0),\ C(0;0;4).$

3. $\iint\limits_S (x-2y+z)\,d\sigma,\qquad A(2;0;0),\ B(0;3;0),\ C(0;0;6).$

4. $\iint\limits_S \left(y^2-x^2\right)d\sigma,\qquad A(2;0;0),\ B(0;4;0),\ C(0;0;8).$

5. $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,d\sigma,\qquad A(1;0;0),\ B(0;4;0),\ C(0;0;4).$

6. $\iint\limits_S \left(z-x^2-y^2\right)d\sigma,\qquad A(2;0;0),\ B(0;1;0),\ C(0;0;4).$

7. $\iint\limits_S x\,(z-y)\,d\sigma,\qquad A(4;0;0),\ B(0;2;0),\ C(0;0;8).$

8. $\iint\limits_S (x+2y-z)\,d\sigma,\qquad A(3;0;0),\ B(0;2;0),\ C(0;0;6).$

9. $\iint\limits_S \left(x^2+y^2-z\right)\,d\sigma,\qquad A(3;0;0),\ B(0;4;0),\ C(0;0;12).$

10. $\iint\limits_S (zx-y)\,d\sigma,\qquad A(2;0;0),\ B(0;5;0),\ C(0;0;10).$

11. $\iint\limits_S x\,(y+z)\,d\sigma,\qquad A(2;0;0),\ B(0;6;0),\ C(0;0;6).$

12. $\iint\limits_S y\,(x-z)\,d\sigma,\qquad A(4;0;0),\ B(0;2;0),\ C(0;0;4).$

13. $\iint\limits_S (2x-y+z)\,d\sigma,\qquad A(1;0;0),\ B(0;5;0),\ C(0;0;5).$

14. $\iint\limits_S (3z-2x-y)\,d\sigma,\qquad A(3;0;0),\ B(0;1;0),\ C(0;0;3).$

15. $\iint\limits_S x\,(y-z)\,d\sigma,\qquad A(1;0;0),\ B(0;3;0),\ C(0;0;3).$

Задача 2.3. *Вычислить работу силового поля* $\mathbf{F}$ *при перемещении материальной точки вдоль линии* $\mathbf{r}$*, заданной векторным параметрическим уравнением:*

1. $\mathbf{F}=z\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}+y\,\mathbf{k},\quad \mathbf{r}=t\,\mathbf{i}+t^2\,\mathbf{j}+t^3\,\mathbf{k},\quad t\in[0,\,1]\,.$

2. $\mathbf{F}=-yz\,\mathbf{i}+xz\,\mathbf{j}+xy\,\mathbf{k},$

$\mathbf{r}=a\cos t\,\mathbf{i}+a\sin t\,\mathbf{j}+ht\,\mathbf{k},\ t\in[0,\,2\,\pi]\,.$

3. $\mathbf{F}=\left(y^2-z^2\right)\,\mathbf{i}+2\,yz\,\mathbf{j}-x^2\,\mathbf{k},$

$\mathbf{r}=t\,\mathbf{i}+t^2\,\mathbf{j}+t^3\,\mathbf{k},\quad t\in[0,\,1]\,.$

4. $\mathbf{F}=y\,\mathbf{i}+z\,\mathbf{j}+x\,\mathbf{k},$

$\mathbf{r}=a\cos t\,\mathbf{i}+a\sin t\,\mathbf{j}+ht\,\mathbf{k},\quad t\in[0,\,2\,\pi]\,.$

5. $\mathbf{F}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k},$

$\mathbf{r}=e^t\cos t\,\mathbf{i}+e^t\sin t\,\mathbf{j}+e^t\,\mathbf{k},\quad t\in(-\infty,\,0]\,.$

6. $\mathbf{F}=(y+z)\,\mathbf{i}+(x-z)\,\mathbf{j}+(y-x)\,\mathbf{k},$

$\mathbf{r}=a\,(t-\sin t)\,\mathbf{i}+a\,(1-\cos t)\,\mathbf{j}+4\,a\sin\dfrac{t}{2}\,\mathbf{k},\quad t\in[0,\,2\,\pi]\,.$

7. $\mathbf{F}=(z-y)\,\mathbf{i}+(x+z)\,\mathbf{j}+\,\mathbf{k},$

$\mathbf{r}=3\,(1+\cos t)\,\mathbf{i}+3\sin t\,\mathbf{j}+3\sin t\,(1+\cos t)\,\mathbf{k},\quad t\in[0,\,\pi]\,.$

8. $\mathbf{F}=(y-z)\,\mathbf{i}+(z-x)\,\mathbf{j}+\left(x^2+y^2\right)\,\mathbf{k},$

$\mathbf{r} = 2\,e^t \cos t\,\mathbf{i} + 2\,e^t \sin t\,\mathbf{j} + 2\,e^t\,\mathbf{k}, \quad t \in (-\infty,\, 0]\,.$

9. $\mathbf{F} = 2\,x\,\mathbf{i} - 3\,y\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k},$

$\mathbf{r} = a\,(t - \sin t)\;\mathbf{i} + a\,(1 - \cos t)\;\mathbf{j} + 4\,a \sin \dfrac{t}{2}\,\mathbf{k}, \quad t \in [0,\, 2\,\pi]\,.$

10. $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},$

$\mathbf{r} = 4\,(\cos t + 1)\;\mathbf{i} + 4 \sin t\,\mathbf{j} + 4 \sin t\,(1 + \cos t)\;\mathbf{k}, \quad t \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right].$

11. $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^{3/2}\,\mathbf{k}, \quad t \in [0,\, 1]\,.$

12. $\mathbf{F} = (x + 3\,y + 2\,z)\;\mathbf{i} + (2\,x + z)\;\mathbf{j} + (x - y)\;\mathbf{k},$

$\mathbf{r} = 3 \cos t\,\mathbf{i} + 3 \sin t\,\mathbf{j} + 5\,t\,\mathbf{k}, \quad t \in [0,\, 2\,\pi]\,.$

13. $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} - x^2\,\mathbf{k},$

$\mathbf{r} = (t - \sin t)\;\mathbf{i} + (1 - \cos t)\;\mathbf{j} + 4\,\sin \dfrac{t}{2}\,\mathbf{k}, \quad t \in [0,\, 2\,\pi]\,.$

14. $\mathbf{F} = (3\,x - 1)\;\mathbf{i} + (y - x + z)\;\mathbf{j} + 4\,z\,\mathbf{k},$

$\mathbf{r} = 4\,e^t \cos t\,\mathbf{i} + 4\,e^t \sin t\,\mathbf{j} + 4\,e^t\,\mathbf{k}, \quad t \in (-\infty,\, 0]\,.$

15. $\mathbf{F} = (x + y)\;\mathbf{i} + (x - z)\;\mathbf{j} + (y + z)\;\mathbf{k},$

$\mathbf{r} = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad t \in [0,\, 1]\,.$

Задача 2.4. *Вычислить циркуляцию векторного поля* **a** *вдоль замкнутого контура* L *с отрицательным направлением обхода:*

1. $\mathbf{a} = y^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}, \quad L = \{A(1;\,1);\; B(1;\,5);\; C(5;\,1)\}.$

2. $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}, \quad L = \left\{x^2 + y^2 = 16\right\}.$

3. $\mathbf{a} = xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}, \quad L = \{A(0;\,0);\; B(4;\,0);\; C(4;\,6);\; D(0;\,3)\}.$

4. $\mathbf{a} = (x + 3\,y)\;\mathbf{i} + (2\,x - y)\;\mathbf{j}, \quad L = \left\{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}.$

5. $\mathbf{a} = (x + y)\;\mathbf{i} + (2\,y - x)\;\mathbf{j},$

$L = \{A(0;\,0);\; B(2;\,2);\; C(2;\,4);\; D(0;\,2)\}.$

6. $\mathbf{a} = xy^2\,\mathbf{i} - yx^2\,\mathbf{j}, \quad L = \left\{x^2 + y^2 = r^2\right\}.$

7. $\mathbf{a} = x^2 y\,\mathbf{i} - y^2 x\,\mathbf{j}, \quad L = \{A(1;0);\; B(5;0);\; C(3;3)\}.$

8. $\mathbf{a} = (y - 2\,x)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j},\; L = \{A(0;\,0);\, B(0;\,6);\, C(4;\,2);\, D(4;\,0)\}.$

9. $\mathbf{a} = xy^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}, \quad L = \left\{x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1\right\}.$

10. $\mathbf{a} = (3\,x - y)\;\mathbf{i} + (4\,x + y)\;\mathbf{j},$

$L = \{A(0;\,0);\; B(2;\,2);\; C(6;\,2);\; D(4;\,0)\}.$

11. $\mathbf{a} = xy^3\,\mathbf{i} - yx^3\,\mathbf{j}, \quad L = \left\{x^2 + y^2 = 4\right\}$ — граница сегмента первой четверти окружности.

12. $\mathbf{a} = xy\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$, $\quad L = \left\{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}$ — граница сегмента первой четверти эллипса.

13. $\mathbf{a} = (x+y)^2\ \mathbf{i} - \left(x^2+y^2\right)\ \mathbf{j}$, $L = \{A(0;0);\ B(1;0);\ C(0;1)\}$.

14. $\mathbf{a} = (x+3\,y)\,\mathbf{i} + (2\,y-3\,x)\,\mathbf{j}$, $L = \{A(0;\ 0);\ B(1;\ 0);\ C(1;\ 1)\}$.

15. $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j}$, $\quad L = \{A(0;\ 0);\ B(2;\ 4);\ C(0;\ 4)\}$.

Задача 2.5. *Вычислить поток векторного поля* **a** *через поверхность, заданную треугольной площадкой с вершинами в точках A, B, C в направлении внешней нормали:*

1. $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $\quad A(1;0;0),\ B(0;2;0),\ C(0;0;2)$.

2. $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$, $\quad A(2;0;0),\ B(0;2;0),\ C(0;0;4)$.

3. $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $\quad A(2;0;0),\ B(0;3;0),\ C(0;0;6)$.

4. $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - 2\,z\,\mathbf{k}$, $\quad A(2;0;0),\ B(0;4;0),\ C(0;0;8)$.

5. $\mathbf{a} = 2\,x^2\,\mathbf{i} + 3\,y^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $\quad A(1;0;0),\quad B(0;3;0),\quad C(0;0;3)$.

6. $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $\quad A(1;0;0),\ B(0;4;0),\ C(0;0;4)$.

7. $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$, $\quad A(1;0;0),\ B(0;5;0),\ C(0;0;5)$.

8. $\mathbf{a} = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$, $\quad A(2;0;0),\quad B(0;1;0),\quad C(0;0;4)$.

9. $\mathbf{a} = 2\,x\,\mathbf{i} + 2\,y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$, $\quad A(3;0;0),\quad B(0;1;0),\quad C(0;0;3)$.

10. $\mathbf{a} = 2\,x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $\quad A(4;0;0),\quad B(0;2;0),\quad C(0;0;8)$.

11. $\mathbf{a} = (y-x)\ \mathbf{i} + (x+y)\ \mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$, $\quad A(3;0;0),\ B(0;3;0),\ C(0;0;9)$.

12. $\mathbf{a} = (3x-1)\,\mathbf{i} + (y-x+z)\,\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$, $\quad A(3;0;0),\ B(0;2;0),\ C(0;0;6)$.

13. $\mathbf{a} = (x-y+z)\,\mathbf{i} + (y-z+x)\,\mathbf{j} + (z-x+y)\,\mathbf{k}$,

$A(3;0;0),\quad B(0;4;0),\quad C(0;0;12)$.

14. $\mathbf{a} = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $\quad A(2;0;0),\quad B(0;5;0),\quad C(0;0;10)$.

15. $\mathbf{a} = \left(xy + x^2\right)\ \mathbf{i} + (2\,y - 2\,xy)\ \mathbf{j} + (z - yz)\ \mathbf{k}$,

$A(2;0;0),\quad B(0;6;0),\quad C(0;0;6)$.

Задача 2.6. *Для векторного поля из предыдущей задачи найти поток через всю поверхность тетраэдра с вершинами в точках $O\,(0;0;0)$ и (A, B, C — из предыдущей задачи) в направлении внешней нормали.*

Глава 3

Векторные поля

Основные формулы и определения

Векторным полем называется область пространства, каждой точке которого поставлен в соответствие определенный вектор $\mathbf{a}(M)$. Этот вектор является функцией от радиус-вектора точки: $\mathbf{a} = a(\mathbf{r})$.

Векторной линией называется линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление соответствующего ей вектора поля. Векторные линии для векторного поля $\mathbf{a} = a_x\mathbf{e_x} + a_y\mathbf{e_y} + a_z\mathbf{e_z}$ определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\,x}{a_x\,(x,y,z)} = \frac{d\,y}{a_y\,(x,y,z)} = \frac{d\,z}{a_z\,(x,y,z)}.$$

(аналогично задаются уравнения для плоских и многомерных полей). При решении ряда задач более удобной оказывается форма уравнений векторных линий в виде:

$$\frac{d\,x}{d\,t} = a_x\,(x,y,z)\,, \qquad \frac{d\,y}{d\,t} = a_y\,(x,y,z)\,, \qquad \frac{d\,z}{d\,t} = a_z\,(x,y,z)\,.$$

Ограниченная некоторой поверхностью часть пространства, состоящая из целых векторных линий, называется **векторной трубкой**.

Пусть $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, u — скалярная функция, $\lambda = \text{const}$. Тогда:

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{div}\,(\mathbf{a}\pm\mathbf{b}) = \operatorname{div}\mathbf{a}\pm\operatorname{div}\mathbf{b}, & \operatorname{rot}\,(\mathbf{a}\pm\mathbf{b}) = \operatorname{rot}\mathbf{a}\pm\operatorname{rot}\mathbf{b},\\
\operatorname{div}\,(u\,\mathbf{c}) = \mathbf{c}\operatorname{grad}u, & \operatorname{rot}\,(\lambda\,\mathbf{a}) = \lambda\operatorname{rot}\mathbf{a},\\
\operatorname{div}\,(u\,\mathbf{a}) = u\operatorname{div}\mathbf{a}+\mathbf{a}\operatorname{grad}u, & \operatorname{rot}\,(u\,\mathbf{a}) = u\operatorname{rot}\mathbf{a}+[\operatorname{grad}u,\,\mathbf{a}]\,.
\end{array}$$

Дадим инвариантные определения (т. е. не зависящие от выбора системы координат) ротора и дивергенции.

Дивергенцией векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется скалярная величина, равная пределу отношения потока векторного поля $\mathbf{a}$ через замкнутую поверхность S_P к величине V_P объема тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что поверхность стягивается в точку P:

$$(\operatorname{div}\mathbf{a})_P = \lim_{V_P\to 0}\frac{\iint\limits_{S_P}(\mathbf{a}, d\sigma)}{V_P}.$$

Проекция ротора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ на какое-либо направление $\mathbf{s}$ в каждой точке поля равна пределу отношения циркуляции по границе l_P плоской площадки, проходящей через эту точку, перпендикулярно к $\mathbf{s}$, к площади этой площадки σ_P, когда граница площадки стягивается к рассматриваемой точке:

$$(\mathbf{s}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a})_P = \lim_{\sigma_P\to 0}\frac{\oint\limits_{l_P}(\mathbf{a}, d\mathbf{r})}{\sigma_P}.$$

Практическое занятие

Задача 3.1. Найти ротор векторного поля:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{x}\,\mathbf{i} + \frac{1}{y}\,\mathbf{j} + \frac{zy}{x}\,\mathbf{k}:$$

Решение: По условию задачи векторное поле задано в декартовой системе координат. **Ротор** в декартовых координатах вычисляется по формуле:

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}.}$$

Выписываем компоненты векторного поля: $a_x = -\dfrac{1}{x}$, $a_y = \dfrac{1}{y}$, $a_z = \dfrac{yz}{x}$ и находим, соответствующие частные производные. Отсюда: $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \dfrac{z}{x}\,\mathbf{i} + \dfrac{zy}{x^2}\,\mathbf{j}$.

Задача 3.2. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{a} = 2x\,\mathbf{i} - 3y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$:

Решение: **Дивергенция векторного поля** есть скалярная функция точек поля и представляет собой объёмную плотность потока вектора $\mathbf{a}$ в заданной точке. По условию задачи векторное поле задано в декартовой системе координат. Дивергенция в декартовых координатах вычисляется по формуле:

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.}$$

Выписываем компоненты векторного поля $a_x = 2x$, $a_y = -3y$, $a_z = z$ и находим, соответствующие частные производные. Отсюда: $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$.

Задача 3.3. Найти производную векторного поля $\mathbf{a} = (x+y)\,\mathbf{i} + 2xyz\,\mathbf{j} + \left(x^2 - y^2\right)\,\mathbf{k}$ по направлению вектора $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$. Вычислить значение производной в точке $M(2;\,1;\,1)$.

Решение: Понятие производной по направлению от векторной функции вводится по аналогии с производной по направлению от скалярной функции. Производная векторного поля $\mathbf{a}$ по направлению единичного вектора $\mathbf{c}$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{c}^\circ} &= (\mathbf{c}^\circ, \nabla)\,\mathbf{a} = \\
&= \left(\frac{c_x}{|\mathbf{c}|}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{c_y}{|\mathbf{c}|}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{c_z}{|\mathbf{c}|}\frac{\partial}{\partial z}\right)(a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}) = \\
&= \left(c_x\frac{\partial a_x}{\partial x} + c_y\frac{\partial a_x}{\partial y} + c_z\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\frac{\mathbf{i}}{|\mathbf{c}|} + \\
&+ \left(c_x\frac{\partial a_y}{\partial x} + c_y\frac{\partial a_y}{\partial y} + c_z\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{c}|} + \\
&+ \left(c_x\frac{\partial a_z}{\partial x} + c_y\frac{\partial a_z}{\partial y} + c_z\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{c}|}.
\end{aligned}$$

Здесь: $c_x = 1$, $c_y = 2$, $c_z = -2$, $|\mathbf{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{9} = 3$, $a_x = x + y$, $a_y = 2xyz$, $a_z = x^2 - y^2$. Тогда:

$\dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{c}^\circ} = (1\cdot 1 + 2\cdot 1 - 2\cdot 0)\,\dfrac{\mathbf{i}}{3} + (1\cdot 2yz + 2\cdot 2xz + (-2)\cdot 2xy)\,\dfrac{\mathbf{j}}{3} + {}$
$+\ (1\cdot 2x + 2\cdot(-2)y - 2\cdot 0)\,\dfrac{\mathbf{k}}{3} = \mathbf{i} + \dfrac{1}{3}\,(2yz + 4xz - 4xy)\,\mathbf{j} + {}$
$+\ \dfrac{2x - 4y}{3}\,\mathbf{k}.$

В полученное выражение подставляем координаты точки $M = (2;\,1;\,1)$ и получаем постоянный вектор:

$$\left.\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{c}^\circ}\right|_M = \mathbf{i} + \frac{1}{3}\,(2 + 8 - 8)\,\mathbf{j} + \frac{4 - 4}{3}\,\mathbf{k} = \mathbf{i} + \frac{2}{3}\,\mathbf{j}.$$

Производные по направлению произвольного (не единичного) вектора $\mathbf{c}$ отличаются от производных по направлению единичного вектора только тем, что в них входит дополнительный скалярный множитель $|\mathbf{c}|$.

Задача 3.4. Пусть заданы векторные поля $\mathbf{a} = \left(x^2 + z\right)\,\mathbf{i} + {}$ $+\, yx\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = (x + y)\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$ и постоянный вектор $\mathbf{c} = {}$ $= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Найти: 1) $\operatorname{div}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, 2) $\operatorname{rot}\,[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$:

Решение: 1) Формула для вычисления дивергенции векторного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеет вид:

$$\boxed{\operatorname{div}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{b})}.$$

Вычисляем $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$, $\operatorname{rot}\mathbf{b} = -y\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Найдём скалярные произведения векторов: $(\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{b}) = \left(x^2 + z\right)\cdot(-y) + yx\cdot 1 + z\cdot 0 = {}$ $= y\left(x - z - x^2\right)$. $(\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) = (x + z)\cdot 0 + yz\cdot 1 + (-z)\cdot y = 0$. Отсюда: $\operatorname{div}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = y\left(x^2 + z - x\right)$.

2) Формула для вычисления ротора векторного произведения векторов $\mathbf{a}$ и имеет вид:

$$\boxed{\operatorname{rot}\,[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = (\mathbf{c}, \nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla)\,\mathbf{c} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{c} - \mathbf{c}\operatorname{div}\mathbf{a}}.$$

Так как $\mathbf{c}$ постоянный вектор, $\operatorname{div}\mathbf{c} = 0$, отсюда третье слагаемое в формуле равно нулю. Также равно нулю и второе слагаемое, которое есть производная вектора $\mathbf{c}$ по направлению вектора $\mathbf{a}$. $\operatorname{div}\mathbf{a} = 3x + 1$. Отсюда $\mathbf{c}\operatorname{div}\mathbf{a} = (3x+1,\, 3x+1,\, 3x+1)$. Вычислим теперь производную векторного поля $\mathbf{a}$ по направлению вектора $\mathbf{c}$: $(\mathbf{c}, \nabla)\,\mathbf{a} = (2x+1)\,\mathbf{i} + (y+x)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Отсюда следует: $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = -x\,\mathbf{i} + (y - 2x - 1)\,\mathbf{j} - 3x\,\mathbf{k}$.

Задача 3.5. 1) При какой функции $f(z)$ дивергенция поля $\mathbf{a} = xz\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(z)\,\mathbf{k}$ будет равна z. 2) Какова должна быть функция $f(x,z)$, чтобы ротор векторного поля $\mathbf{a} = yz\,\mathbf{i} + f(x,z)\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ совпадал с вектором $\mathbf{b} = \mathbf{k} - \mathbf{i}$.

Решение: 1) Найдём частные производные: $\dfrac{\partial a_x}{\partial x} = z$, $\dfrac{\partial a_y}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial a_z}{\partial z} = f'(z)$. Подставляя в выражение для дивергенции получаем: $z + 1 + f'(z) = z$. Отсюда: $f'(z) = -1$ и $f(z) = C - z$.

2) Пусть $\operatorname{rot}\mathbf{a} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{i}$. По условию задачи компонента $b_y = 0$. Отсюда следует условие: $\dfrac{\partial a_x}{\partial z} = \dfrac{\partial a_z}{\partial x}$. Из равенств $b_x = -1$, $b_z = 1$, следует: $\dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z} = -1$, $\dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y} = 1$. После интегрирования последних выражений для неизвестной функции a_y получим: $a_y = \displaystyle\int \left(b_z + \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx + C(z)$, $a_y = \displaystyle\int \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - b_x\right) dz + C(x)$, где $C(z)$ и $C(x)$ — неизвестные функции соответствующих переменных, имеют смысл постоянных интегрирования. По условию задачи $a_x = yz$, $a_z = xy$. Совершая подстановку в полученные формулы получаем для a_y: $a_y = \displaystyle\int (1+z)\,dx = xz + x + C(z)$, $a_y = \displaystyle\int (x+1)\,dz = xz + z + C(x)$.

Приравнивая полученные выражения находим значения для $C(z)$ и $C(x)$: $xz + x + C(z) = xz + z + C(x)$. Отсюда: $C(z) = z + C$,

$C(x) = x + C$. Тогда для искомой функции $f(x,z)$ получаем: $f(x,z) = xz + x + z + C$.

В случае когда неизвестна компонента поля a_x и при условии: $\dfrac{\partial a_z}{\partial y} = \dfrac{\partial a_y}{\partial z}$, получаем следующие интегралы:

$$a_x = \int \left(b_y + \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dz + C(y), \quad a_x = \int \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - b_z \right) dy + C(z).$$

В случае когда неизвестна компонента поля a_z и при условии: $\dfrac{\partial a_y}{\partial x} = \dfrac{\partial a_x}{\partial y}$, получаем:

$$a_z = \int \left(b_x + \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dy + C(x), \quad a_z = \int \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - b_y \right) dx + C(y).$$

Варианты контрольных работ

Задача 3.1. *Найти ротор векторного поля* **a***:*

1. $\mathbf{a} = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$.

2. $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{(x+y+z)^{2/3}}$.

3. $\mathbf{a} = x^2y\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$.

4. $\mathbf{a} = 3\,x^2y^2z\,\mathbf{i} + 2\,x^3yz\,\mathbf{j} + x^3y^2\,\mathbf{k}$.

5. $\mathbf{a} = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

6. $\mathbf{a} = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$.

7. $\mathbf{a} = x^2y\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$.

8. $\mathbf{a} = x^2y\,\mathbf{i} - xy^2\,\mathbf{j} + z\left(x^2 + y^2\right)\,\mathbf{k}$.

9. $\mathbf{a} = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$.

10. $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

11. $\mathbf{a} = xz^2\,\mathbf{i} + yx^2\,\mathbf{j} + zy^2\,\mathbf{k}$.

12. $\mathbf{a} = xz^3\,\mathbf{i} + yx^3\,\mathbf{j} + zy^3\,\mathbf{k}$.

13. $\mathbf{a} = xy^2\,\mathbf{i} + yz^2\,\mathbf{j} + zx^2\,\mathbf{k}$.

14. $\mathbf{a} = x\left(y^2 + z^2\right)\,\mathbf{i} + y\left(x^2 + z^2\right)\,\mathbf{j} + z\left(x^2 + y^2\right)\,\mathbf{k}$.

15. $\mathbf{a} = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j} + z\left(x^2 + y^2\right)\,\mathbf{k}$.

Задача 3.2. *Найти дивергенцию векторного поля* **a***:*

1. $\mathbf{a} = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$.

2. $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{(x + y + z)^{2/3}}$.

3. $\mathbf{a} = x^2y\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$.

4. $\mathbf{a} = 3\,x^2y^2z\,\mathbf{i} + 2\,x^3yz\,\mathbf{j} + x^3y^2\,\mathbf{k}$.

5. $\mathbf{a} = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

6. $\mathbf{a} = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} - z^3\,\mathbf{k}$.

7. $\mathbf{a} = x^2y\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$.

8. $\mathbf{a} = x^2y\,\mathbf{i} - xy^2\,\mathbf{j} + \left(x^2 + y^2\right) z\,\mathbf{k}$.

9. $\mathbf{a} = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$.

10. $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

11. $\mathbf{a} = xz^2\,\mathbf{i} + yx^2\,\mathbf{j} + zy^2\,\mathbf{k}$.

12. $\mathbf{a} = xz^3\,\mathbf{i} + yx^3\,\mathbf{j} + zy^3\,\mathbf{k}$.

13. $\mathbf{a} = xy^2\,\mathbf{i} + yz^2\,\mathbf{j} + zx^2\,\mathbf{k}$.

14. $\mathbf{a} = x\left(y^2 + z^2\right)\,\mathbf{i} + y\left(x^2 + z^2\right)\,\mathbf{j} + z\left(x^2 + y^2\right)\,\mathbf{k}$.

15. $\mathbf{a} = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j} + z\left(x^2 + y^2\right)\,\mathbf{k}$.

Задача 3.3. *Найти производную вектора* $\mathbf{a}$ *по направлению вектора* $\mathbf{c} = 2\,x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + 2\,z\,\mathbf{k}$. *Вычислить значение производной в точке* $M\,(1;\ 1;\ 1)$.

1. $\mathbf{a} = 2\,x\,y\,z\,\mathbf{i} + z\,x^2\,\mathbf{j} + y\,x^2\,\mathbf{k}$.

2. $\mathbf{a} = yz\,(2x + y + z)\,\mathbf{i} + xz\,(x + 2y + z)\,\mathbf{j} + xy\,(x + y + 2z)\,\mathbf{k}$.

3. $\mathbf{a} = y\,(z - x)\,\mathbf{i} + \left(y\,z^2 - x^2\right)\,\mathbf{j} + y\,(x + y\,z)\,\mathbf{k}$.

4. $\mathbf{a} = x\,y\,z\,\mathbf{i} + \left(x^2 - 2\,y\,z\right)\,\mathbf{j} - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\,\mathbf{k}$.

5. $\mathbf{a} = \left(2\,x\,y + y^2 + 2\,z\right)\,\mathbf{i} + \left(x^2 + 2\,x\,y + 2\,z\right)\,\mathbf{j} + 2\,z\,(x + y)\,\mathbf{k}$.

6. $\mathbf{a} = y\,z\,x^2\,\mathbf{i} + x\,z\,y^2\,\mathbf{j} + x\,y\,z^2\,\mathbf{k}$.

7. $\mathbf{a} = (x + y + z)\,\mathbf{i} + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\,\mathbf{j} + \left(x^3 + y^3 + z^3\right)\,\mathbf{k}$.

8. $\mathbf{a} = \left(3\,z\,x^2 - y^3\right)\,\mathbf{i} + \left(x^3 - 3\,z\,y^2\right)\,\mathbf{j} + \left(z^3 - 3\,y\,x^2\right)\,\mathbf{k}$.

9. $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{x + y + z}$.

10. $\mathbf{a} = x\,(2\,y\,x + z)\,\mathbf{i} + y\,(x\,y - z)\,\mathbf{j} - 6\,x\,y\,z\,\mathbf{k}$.

11. $\mathbf{a} = \left(z^2 - y\,x^3\right)\,\mathbf{i} + \left(x^2 - z\,y^2\right)\,\mathbf{j} + y\,z\left(3\,x^2 + z\right)\,\mathbf{k}$.

12. $\mathbf{a} = 2\,x\,y\,z\,\mathbf{i} + (x - y + z)\,\mathbf{j} + z\,(1 - y\,z)\,\mathbf{k}$.

13. $\mathbf{a} = 2\,y\,z\,e^x\,\mathbf{i} + 2\,x\,y\,e^z\,\mathbf{j} - 2\,x\,z\,e^y\,\mathbf{k}$.

14. $\mathbf{a} = 2\,y\,z\,\ln\,x\,\mathbf{i} - 2\,x\,z\,\ln\,y\,\mathbf{j} + 2\,x\,y\,\ln\,z\,\mathbf{k}$.

15. $\mathbf{a} = e^x \ln\, y\, \mathbf{i} + 2\, e^y \ln\, z\, \mathbf{j} - e^z \ln\, x\, \mathbf{k}$.

Задача 3.4. *Найти:* 1) $\operatorname{div}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, 2) $\operatorname{rot}[\mathbf{a},\mathbf{c}]$, *где* $\mathbf{c}$ *постоянный вектор равный:* $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

1. $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = z^2\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$.
2. $\mathbf{a} = xz\,\mathbf{i} + yx\,\mathbf{j} + zy\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = z\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$.
3. $\mathbf{a} = (x+z)\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = (z+4)\,\mathbf{i} + e^y\,\mathbf{j} + (x-4)\,\mathbf{k}$.
4. $\mathbf{a} = \cos x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + \cos z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \dfrac{1}{1+x^2}\,\mathbf{i} - z^2\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$.
5. $\mathbf{a} = \cos x\,\mathbf{i} - \arcsin z\,\mathbf{j} - \cos y\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{b} = \cos x\,\mathbf{i} + \arccos z\,\mathbf{j} + \cos y\,\mathbf{k}$.
6. $\mathbf{a} = \ln x\,\mathbf{i} + \ln y\,\mathbf{j} + (\ln z + 4y)\ \mathbf{k}$,
$\mathbf{b} = (e^x + z)\ \mathbf{i} + (e^y - 2y)\ \mathbf{j} + e^z\,\mathbf{k}$.
7. $\mathbf{a} = \left(x^3 - z^2\right)\ \mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + 5y\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = x^3\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$.
8. $\mathbf{a} = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = (6x-2)\,\mathbf{i} + (y-3)\,\mathbf{j} + (3z-4)\,\mathbf{k}$.
9. $\mathbf{a} = \left(x^3 - 1\right)\ \mathbf{i} + \left(z^3 - 1\right)\ \mathbf{j} + \left(y^3 - 1\right)\ \mathbf{k}$,
$\mathbf{b} = \operatorname{tg} x\,\mathbf{i} + \left(y^3 - 1\right)\ \mathbf{j} + \left(z^3 - 1\right)\ \mathbf{k}$.
10. $\mathbf{a} = (5-z)\,\mathbf{i} + e^{-y}\,\mathbf{j} + (5-x)\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = e^{-z}\,\mathbf{i} + \operatorname{tg} y\,\mathbf{j} + e^{-x}\,\mathbf{k}$.
11. $\mathbf{a} = y^2\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + \cos z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \sin x\,\mathbf{i} + z^3\,\mathbf{j} + y^3\,\mathbf{k}$.
12. $\mathbf{a} = (2z - 5x)\,\mathbf{i} + (x-y)\,\mathbf{j} + (2x - 5z)\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{b} = e^z\,\mathbf{i} + e^y\,\mathbf{j} + e^x\,\mathbf{k}$.
13. $\mathbf{a} = (y-z)\,\mathbf{i} + (x-y)\,\mathbf{j} + (x-z)\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \ln z\,\mathbf{i} + \ln x\,\mathbf{k}$.
14. $\mathbf{a} = \left(x^2 - z\right)\ \mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{b} = (z - 4x)\,\mathbf{i} + \left(x - 3y^2\right)\ \mathbf{j} + (y - 3z)\,\mathbf{k}$.
15. $\mathbf{a} = \left(x^2 + y\right)\ \mathbf{i} + \left(3y^2 + z\right)\ \mathbf{j} + \left(3x + z^2\right)\ \mathbf{k}$,
$\mathbf{b} = (2x+4)\ \mathbf{i} + (5+3z)\ \mathbf{j} + (4y-3)\ \mathbf{k}$.

Задача 3.5. 1) *При какой функции* $f(x,y,z)$ *дивергенция поля* $\mathbf{a}$ *будет равна* $g(x,y,z)$. 2) *Какова должна быть функция* $f(x,y,z)$, *чтобы ротор векторного поля* $\mathbf{b}$ *совпадал с вектором* $\mathbf{c}$.

1. $\mathbf{a} = -2xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + f(x,y,z)\,\mathbf{k}$, $g(x,y,z) = z^2$;
$\mathbf{b} = \left(y^2 + z^2\right)\ \mathbf{i} + f(x,y,z)\,\mathbf{j} + 2xz\,\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.
2. $\mathbf{a} = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + f(x,y,z)\,\mathbf{k}$, $g(x,y,z) = x^2$;
$\mathbf{b} = y^2 z\,\mathbf{i} + f(x,y,z)\,\mathbf{j} + xy^2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

3. $\mathbf{a} = y\ln x\,\mathbf{i} + x\ln y\,\mathbf{j} + f(x,y,z)\,\mathbf{k}, \quad g(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2}{xy};$
$\mathbf{b} = \ln(y+z)\ \mathbf{i} + f(x,y,z)\,\mathbf{j} + \dfrac{x}{y+z}\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = 3\,\mathbf{i} - \mathbf{k}.$
4. $\mathbf{a} = e^z\,\mathbf{i} + \sin y\,\mathbf{j} + f(x,y,z)\,\mathbf{k}, \quad g(x,y,z) = \cos y + z;$
$\mathbf{b} = e^{y^2-z^2}\,\mathbf{i} + f(x,y,z)\,\mathbf{j} - 2xze^{y^2-z^2}\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = 4\,\mathbf{i} + \mathbf{k}.$
5. $\mathbf{a} = \left(x^2+y^2\right)\,\mathbf{i} + \left(y^2+z^2\right)\,\mathbf{j} + f(x,y,z)\,\mathbf{k}, \quad g(x,y,z) = z +$
$+ 2y + 2x; \quad \mathbf{b} = \left(y^3 - z\right)\,\mathbf{i} + f(x,y,z)\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = 5\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{k}.$
6. $\mathbf{a} = x^2yz\,\mathbf{i} + f(x,y,z)\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}, \quad g(x,y,z) = 6yz;$
$\mathbf{b} = f(x,y,z)\,\mathbf{i} - 12yz\,\mathbf{j} + \left(4 - 6y^2\right)\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = 6\,\mathbf{j} - \mathbf{k}.$
7. $\mathbf{a} = xy^2\,\mathbf{i} + f(x,y,z)\,\mathbf{j} + z\left(x^2+y^2\right)\,\mathbf{k},\ g(x,y,z) = 2\left(x^2+y^2\right);$
$\mathbf{b} = f(x,y,z)\,\mathbf{i} + z\cos y\,\mathbf{j} + \left(x^2 + \sin y\right)\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = 2\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}.$
8. $\mathbf{a} = x^2y\,\mathbf{i} + f(x,y,z)\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}, \quad g(x,y,z) = 5xy;$
$\mathbf{b} = f(x,y,z)\,\mathbf{i} - xze^{-y}\,\mathbf{j} + xe^{-y}\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = 8\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}.$
9. $\mathbf{a} = \operatorname{arctg} x\,\mathbf{i} + f(x,y,z)\,\mathbf{j} + e^z\,\mathbf{k}, \quad g(x,y,z) = \dfrac{1}{1+x^2};$
$\mathbf{b} = f(x,y,z)\,\mathbf{i} - 2yz\,\mathbf{j} + \left(x^2 - y^2\right)\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = \mathbf{j} - \mathbf{k}.$
10. $\mathbf{a} = \arcsin y\,\mathbf{i} + f(x,y,z)\,\mathbf{j} + \arcsin z\,\mathbf{k}, \quad g(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}};$
$\mathbf{b} = f(x,y,z)\,\mathbf{i} - z\cos y\,\mathbf{j} + (\cos x - cosy)\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = 10\,\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k}.$
11. $\mathbf{a} = f(x,y,z)\,\mathbf{i} + \left(x^2+3y\right)\,\mathbf{j} + \left(z^2 - 3x\right)\,\mathbf{k},\ g(x,y,z) = 3+y+z;$
$\mathbf{b} = z^3y\,\mathbf{i} + xz^3\,\mathbf{j} + f(x,y,z)\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = -\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}.$
12. $\mathbf{a} = f(x,y,z)\,\mathbf{i} + y\cos x\,\mathbf{j} + z\sin x\,\mathbf{k}, \quad g(x,y,z) = 1;$
$\mathbf{b} = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + f(x,y,z)\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = 4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}.$
13. $\mathbf{a} = f(x,y,z)\,\mathbf{i} + e^y\,\mathbf{j} + e^z\,\mathbf{k}, \quad g(x,y,z) = e^y;$
$\mathbf{b} = \left(y^2 + \operatorname{arctg} z\right)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + f(x,y,z)\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$
14. $\mathbf{a} = f(x,y,z)\,\mathbf{i} + \left(3x^3 - 4y\right)\,\mathbf{j} + \left(3y^3 - 2z\right)\,\mathbf{k},\ g(x,y,z) = -6;$
$\mathbf{b} = z^2\ln y\,\mathbf{i} + \dfrac{xz^2}{y}\,\mathbf{j} + f(x,y,z)\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = 3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}.$
15. $\mathbf{a} = f(x,y,z)\,\mathbf{i} + \sin z\cos y\,\mathbf{j} + \sin y\cos z\,\mathbf{k}, \quad g(x,y,z) =$
$= \sin y\sin z; \quad \mathbf{b} = \left(y^3 + \cos z\right)\,\mathbf{i} + 3xy^2\,\mathbf{j} + f(x,y,z)\,\mathbf{k},\ \mathbf{c} = 3\,\mathbf{i} - \mathbf{j}.$

Глава 4

Векторный анализ в криволинейных координатах

Основные формулы и определения

Во многих задачах удобно определять положение точки пространства не декартовыми координатами, а другими числами (q_1, q_2, q_3), которые называют криволинейными координатами точки. Пусть $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ — базисные векторы произвольной криволинейной системы координат. Тогда выражения для градиента скалярного, дивергенции и ротора векторного полей имеют вид:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3)} \left(\frac{\partial u}{\partial q_1} \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 + \frac{\partial u}{\partial q_2} \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 + \frac{\partial u}{\partial q_3} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \right).$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3)} \left(\frac{\partial\, \mathbf{a}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial\, \mathbf{a}(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial\, \mathbf{a}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{\partial q_3} \right).$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3)} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ \mathbf{a}\,\mathbf{r}_1 & \mathbf{a}\,\mathbf{r}_2 & \mathbf{a}\,\mathbf{r}_3 \end{vmatrix}.$$

Ортогональными называются такие системы криволинейных координат, в которых в каждой точке пространства координатные линии пересекаются взаимно перпендикулярно. Если базисные векторы по модулю равны единице $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, система координат называется **ортонормированной**. Главное отличие криволинейных координат от декартовых состоит в том, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ могут изменять свои направления при переходе от одной точки к другой. Запишем выражения для градиента скалярного, дивергенции и ротора векторного полей в ортогональных координатах.

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\mathbf{e_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\mathbf{e_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\mathbf{e_3}.$$

где $\mathbf{e_i}$ — орты, h_i — коэффициенты Ламэ данной криволинейной системы координат:

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}.$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial(a_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 h_1 h_2)}{\partial q_3}\right).$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{h_2 h_3}\mathbf{e}_1 & \dfrac{1}{h_1 h_3}\mathbf{e}_2 & \dfrac{1}{h_1 h_2}\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1\, h_1 & a_2\, h_2 & a_3\, h_3 \end{vmatrix}.$$

Практическое занятие

Задача 4.1. Для скалярного поля $u = \ln\left(x^2 + y^2 - z\right)$, заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и градиент в цилиндрической системе координат.

Решение: Криволинейные координаты точки в цилиндрической системе задаются числами: $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$. Связь декартовых координат с цилиндрическими определяется формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

В цилиндрических координатах Коэффициенты Ламэ равны: $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$. Тогда выражение для градиента будет иметь вид:

$$\boxed{\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{e}_z.}$$

Запишем скалярное поле в новых цилиндрических координатах: $u = \ln\Big((\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 - z\Big) = \ln\left(\rho^2 - z\right)$.

Найдём соответствующие частные производные: $\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{2\rho}{\rho^2 - z}$, $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho^2 - z}$. Следовательно: $\operatorname{grad} u = \dfrac{2\rho\mathbf{e}_\rho - \mathbf{e}_z}{\rho^2 - z}$.

Задача 4.2. Для скалярного поля $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и градиент в сферической системе координат.

Решение: Криволинейные координаты точки в сферической системе задаются числами: $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$. Связь декартовых координат со сферическими определяется формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

В сферических координатах коэффициенты Ламэ равны: $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$. Тогда выражение для градиента будет иметь вид:

$$\boxed{\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_\mathbf{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi.}$$

Запишем скалярное поле в новых сферических координатах: $u = \ln\Big((r\cos\varphi\sin\theta)^2 + (r\sin\varphi\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2\Big) = \ln\left(r^2\right)$.

Найдём соответствующие частные производные: $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{2}{r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = 0$. Следовательно: $\operatorname{grad} u = \dfrac{2}{r}\mathbf{e}_\mathbf{r}$.

Задача 4.3. Для векторного поля $\mathbf{a} = 2x\,\mathbf{i} - 3y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и дивергенцию в цилиндрической системе координат.

Решение: Дивергенция в цилиндрических координатах вычисляется по формуле:

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.}$$

По условию задачи векторное поле задано в декартовой системе координат. Для вычислений по заданной формуле необходимо записать векторное поле в цилиндрической системе координат, т. е надо осуществить переход от декартовой системы координат в цилиндрическую. В случае произвольной криволинейной системы координат такой переход определяется решением следующей системы алгебраических уравнений:

$$\boxed{\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial x}{\partial q_1}a_x + \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial y}{\partial q_1}a_y + \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial z}{\partial q_1}a_z, \\ a_2 = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial x}{\partial q_2}a_x + \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial y}{\partial q_2}a_y + \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial z}{\partial q_2}a_z, \\ a_3 = \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial x}{\partial q_3}a_x + \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial y}{\partial q_3}a_y + \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial z}{\partial q_3}a_z. \end{cases}}$$

здесь h_1, h_2, h_3 — коэффициенты Ламэ. В цилиндрических координатах они равны: $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$. Компоненты векторного поля a_x, a_y, a_z запишем в координатах ρ, φ, z: $a_x = 2x = 2\rho\cos\varphi$, $a_y = -3y = -3\rho\sin\varphi$, $a_z = z$. Найдём частные производные:
$\dfrac{\partial x}{\partial\rho} = \cos\varphi$, $\dfrac{\partial y}{\partial\rho} = \sin\varphi$, $\dfrac{\partial z}{\partial\rho} = 0$, $\dfrac{\partial x}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi$, $\dfrac{\partial y}{\partial\varphi} = \rho\cos\varphi$, $\dfrac{\partial z}{\partial\varphi} = 0$, $\dfrac{\partial x}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial y}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial z} = 1$.
Подставляя найденные значения в систему уравнений получим:

$$\begin{cases} a_\rho = a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi, \\ a_\varphi = -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi, \\ a_z = z. \end{cases}$$

Таким образом: $a_\rho = 2\rho\cos^2\varphi - 3\rho\sin^2\varphi$, $a_\varphi = -\dfrac{5}{2}\rho\sin 2\varphi$, $a_z = z$.

Выражение для векторного поля в цилиндрических координатах имеет вид: $\mathbf{a} = a_\rho\,\mathbf{e}_\rho + a_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + a_z\,\mathbf{e}_z$. Тогда:

$$\mathbf{a} = \left(2\cos^2\varphi - 3\rho\sin^2\varphi\right)\rho\,\mathbf{e}_\rho - \frac{5}{2}\rho\sin 2\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + z\,\mathbf{e}_z.$$

Вычислим частные производные и подставим их в выражение для дивергенции: $\dfrac{\partial\left(\rho a_\rho\right)}{\partial\rho} = \rho\left(4\cos^2\varphi - 6\,\sin^2\varphi\right)$, $\dfrac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} = -5\rho\cos 2\varphi$, $\quad \dfrac{\partial a_z}{\partial z} = 1$.

Отсюда: $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$.

Задача 4.4. Для векторного поля $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и дивергенцию в сферической системе координат.

Решение: Дивергенция в сферических координатах вычисляется по формуле:

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 a_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sin\theta a_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}.}$$

По условию задачи векторное поле задано в декартовой системе координат. В цилиндрических координатах коэффициенты Ламэ равны: $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$. Компоненты векторного поля a_x, a_y, a_z запишем в координатах r, θ, φ:

$$a_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \cos\varphi\sin\theta,$$
$$a_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sin\varphi\sin\theta,\ a_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \cos\theta.$$

Найдём частные производные:

$\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi \sin\theta$, $\dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi \sin\theta$, $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta$, $\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\sin\theta$, $\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi\sin\theta$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$, $\dfrac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\varphi\cos\theta$, $\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\sin\varphi\cos\theta$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta$.

Подставляя найденные значения в систему уравнений получим:

$$\begin{cases} a_r = \cos\varphi\sin\theta\, a_x + \sin\varphi\sin\theta\, a_y + \cos\theta\, a_z, \\ a_\theta = \cos\varphi\cos\theta\, a_x + \sin\varphi\cos\theta\, a_y - \sin\theta\, a_z, \\ a_\varphi = -\sin\varphi\, a_x + \cos\varphi\, a_y. \end{cases}$$

В сферических координатах векторное поле имеет вид: $\mathbf{a} = a_r\,\mathbf{e_r} + a_\theta\,\mathbf{e}_\theta + a_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$, где $a_r = 1$, $a_\theta = 0$, $a_\varphi = 0$. Таким образом, $\mathbf{a} = 1\cdot\mathbf{e_r} + 0\cdot\mathbf{e}_\theta + 0\cdot\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e_r}$.

Отсюда: $\operatorname{div}\mathbf{a} = \dfrac{2}{r}$.

Задача 4.5. Для векторного поля $\mathbf{a} = -\dfrac{1}{x}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{y}\,\mathbf{j} + \dfrac{zy}{x}\,\mathbf{k}$, заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и ротор в цилиндрической системе координат.

Решение: Ротор в цилиндрических координатах вычисляется по формуле:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \rho\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \\ + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z.$$

По условию задачи векторное поле задано в декартовой системе координат. Компоненты векторного поля a_x, a_y, a_z

запишем в координатах ρ, φ, z: $a_x = -\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\rho}{\cos\varphi}$, $a_y = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\rho\sin\varphi}$, $a_z = \dfrac{zy}{x} = z\operatorname{tg}\varphi$.

Находим компоненты векторного поля в новой системе координат: $a_\rho = 0$, $a_\varphi = \dfrac{2}{\rho}\operatorname{ctg}2\varphi$, $a_z = z\operatorname{tg}\varphi$.

Выражение для заданного векторного поля в цилиндрических координатах имеет вид: $\mathbf{a} = \dfrac{2}{\rho}\operatorname{ctg}2\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + z\operatorname{tg}\varphi\,\mathbf{e}_z$.

Найдём частные производные: $\dfrac{\partial a_z}{\partial\varphi} = \dfrac{z}{\cos^2\varphi}$, $\dfrac{\partial a_\varphi}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial a_\rho}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial a_z}{\partial\rho} = 0$, $\dfrac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho} = 0$, $\dfrac{\partial a_\rho}{\partial\varphi} = 0$. Отсюда: $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \dfrac{z}{\cos^2\varphi}\,\mathbf{e}_\rho$.

Задача 4.6. Для векторного поля $\mathbf{a} = -\dfrac{1}{x}\mathbf{i} + \dfrac{1}{y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$, заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и ротор в сферической системе координат.

Решение: Ротор в сферических координатах вычисляется по формуле:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\mathbf{e_r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\theta & \dfrac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ a_r & ra_\theta & r\sin\theta a_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e_r} +$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \sin\theta\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi.$$

По условию задачи векторное поле задано в декартовой системе координат. Компоненты векторного поля a_x, a_y, a_z

запишем в координатах r, θ, φ: $a_x = -\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{r\cos\varphi\sin\theta}$, $a_y = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{r\sin\varphi\sin\theta}$, $a_z = \dfrac{zy}{x} = 1$.

Находим компоненты векторного поля в новой системе координат: $a_r = \cos\theta$, $a_\theta = -\sin\theta$, $a_\varphi = \dfrac{2}{r\sin\theta\sin 2\varphi}$.

Выражение для заданного векторного поля в сферических координатах имеет вид: $\mathbf{a} = \cos\theta\mathbf{e_r} - \sin\theta\mathbf{e}_\theta + \dfrac{2}{r\sin\theta\sin 2\varphi}\mathbf{e}_\varphi$.

Найдём частные производные: $\dfrac{\partial\left(\sin\theta a_\varphi\right)}{\partial\theta} = \left(\dfrac{2}{r\sin 2\varphi}\right)'_\theta = 0$, $\dfrac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} = \left(-\sin\theta\right)'_\varphi = 0$, $\dfrac{\partial a_r}{\partial\varphi} = \left(\cos\theta\right)'_\varphi = 0$, $\dfrac{\partial\left(r a_\varphi\right)}{\partial r} = \left(\dfrac{2}{\sin\theta\sin 2\varphi}\right)'_r = 0$, $\dfrac{\partial\left(r a_\theta\right)}{\partial r} = \left(-r\sin\theta\right)'_r = -\sin\theta$, $\dfrac{\partial a_r}{\partial\theta} = \left(\cos\theta\right)'_\theta = -\sin\theta$. В результате подстановки найденных значений частных производных в формулу для ротора получаем: $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0\cdot\mathbf{e_r} + 0\cdot\mathbf{e}_\theta + 0\cdot\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{0}$.

Варианты контрольных работ

Задача 4.1. *Для скалярного поля, заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и градиент в цилиндрической системе координат.*

1. $u = \dfrac{yz^2}{x}\sqrt{x^2+y^2}$. **2.** $u = \dfrac{xz}{y\sqrt{x^2+y^2}}$. **3.** $u = \dfrac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{z^2}$.

4. $u = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}{z}$. **5.** $u = \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)z^2$.

6. $u = xyz + z\left(x^2+y^2\right)^{3/2}$. **7.** $u = \dfrac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8. $u = \dfrac{x^2y^2z}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$. **9.** $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

10. $u = \ln\left(\dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. **11.** $u = \sin\left(\dfrac{z^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}\right)$.

12. $u = \cos\left(\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{z^3}\right)$. **13.** $u = \exp(z\sqrt{x^2+y^2})$.

14. $u = z\ln\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$. **15.** $u = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{xyz}\right)$.

Задача 4.2. *Для скалярного поля, заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и градиент в сферической системе координат.*

1. $u = \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$. **2.** $u = \dfrac{z^3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$.

3. $u = \dfrac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{z^2}$. **4.** $u = \dfrac{yz^2}{x\left(x^2+y^2+z^2\right)}$.

5. $u = \dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **6.** $u = \ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$.

7. $u = \ln\left(1+\dfrac{z^2}{x^2+y^2}\right)$. **8.** $u = \dfrac{z^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

9. $u = \ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right)$. **10.** $u = \dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$.

11. $u = z\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$. **12.** $u = \dfrac{z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2+y^2}$.

13. $u = \dfrac{x^2+y^2}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **14.** $u = \dfrac{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2}$.

15. $u = \exp\left(\dfrac{x^2+y^2}{z}\right)$.

Задача 4.3. *Для векторного поля* $\mathbf{a}$, *заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и дивергенцию в цилиндрической системе координат:*

1. $\mathbf{a} = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}$. **2.** $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}-z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3. $\mathbf{a} = (xz-y)\,\mathbf{i} + (yz+x)\,\mathbf{j} + \dfrac{zy}{x}\,\mathbf{k}$. **4.** $\mathbf{a} = \dfrac{xz\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}}{x^2+y^2} + z^2\,\mathbf{k}$.

5. $\mathbf{a} = \left(x^2\left(x^2+y^2\right) - \dfrac{zy^2}{x^2+y^2}\right)\mathbf{i} + xy\left(x^2+y^2+\dfrac{z}{x^2+y^2}\right)\mathbf{j}$.

6. $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - x\mathbf{k}}{x\left(x^2+y^2\right)^2}$.

7. $\mathbf{a} = \left(x\sqrt{x^{+}y^2} - y\right)\,\mathbf{i} + \left(y\sqrt{x^2+y^2} + x\right)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

8. $\mathbf{a} = \left(x\sqrt{x^2+y^2} - yz\right)\,\mathbf{i} + \left(y\sqrt{x^2+y^2} + xz\right)\,\mathbf{j} + z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}$.

9. $\mathbf{a} = \dfrac{xz\,\mathbf{i} + yz\mathbf{j}}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} - \dfrac{z}{x^2+y^2}\,\mathbf{k}$. **10.** $\mathbf{a} = \dfrac{xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$.

11. $\mathbf{a} = \dfrac{xz\,\mathbf{i}}{y\left(x^2+y^2\right)} + \dfrac{z\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{x^2+y^2}$. **12.** $\mathbf{a} = \dfrac{xz\,\mathbf{i}}{y\left(x^2+y^2\right)} + \dfrac{z\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{x^2+y^2}$.

13. $\mathbf{a} = (xz + y)\,\mathbf{i} + (yz - x)\,\mathbf{j} - \dfrac{yz\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

14. $\mathbf{a} = xz\,\mathbf{i} + zy\,\mathbf{j} + \left(x^2+y^2\right)^2\,\mathbf{k}$.

15. $\mathbf{a} = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} - z\left(x^2+y^2\right)\,\mathbf{k}$.

Задача 4.4. *Для векторного поля* **a**, *заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и дивергенцию в сферической системе координат:*

1. $\mathbf{a} = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **2.** $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3. $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **4.** $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$.

5. $\mathbf{a} = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + \sqrt{x^2+y^2}\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2}$. **6.** $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - z\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$.

7. $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$. **8.** $\mathbf{a} = \dfrac{yz\,\mathbf{i} + zy^2\,\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$.

9. $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - z\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$.

10. $\mathbf{a} = \dfrac{x(x+z)\,\mathbf{i} + y(x+z)\,\mathbf{j} + (xz - x^2 - y^2)\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

11. $\mathbf{a} = -\dfrac{y^2\,\mathbf{i}}{x\left(x^2+y^2+z^2\right)} + \dfrac{y\,\mathbf{j}}{x^2+y^2+z^2}$.

12. $\mathbf{a} = \left(\dfrac{xyz}{x^2+y^2} - \dfrac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{zy^2}{x^2+y^2} + \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathbf{j} - y\,\mathbf{k}$.

13. $\mathbf{a} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\left(x\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right).$

14. $\mathbf{a} = \dfrac{x^2\,\mathbf{i}+xy\,\mathbf{j}+xz\,\mathbf{k}}{y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}.$ **15.** $\mathbf{a} = \dfrac{xz^2\,\mathbf{i}}{x^2+y^2}+\dfrac{yz^2\mathbf{j}}{x^2+y^2}-z\,\mathbf{k}.$

Задача 4.5. *Для векторного поля* $\mathbf{a}$*, заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и ротор в цилиндрической системе координат:*

1. $\mathbf{a} = xz\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}-z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}.$

2. $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}-z\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

3. $\mathbf{a} = xz\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}+\dfrac{y\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

4. $\mathbf{a} = \dfrac{xz\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}}{x^2+y^2}+z^2\,\mathbf{k}.$

5. $\mathbf{a} = \dfrac{x^2\,\mathbf{i}+yx\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}+z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}.$

6. $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}}{(x^2+y^2)^{3/2}}-\dfrac{z\,\mathbf{k}}{x^2+y^2}.$

7. $\mathbf{a} = (x-y)\,\mathbf{i}+(x+y)\,\mathbf{j}+\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}.$

8. $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}-x\,\mathbf{k}}{x\left(x^2+y^2\right)}.$

9. $\mathbf{a} = xz\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}-z\left(x^2+y^2\right)\,\mathbf{k}.$

10. $\mathbf{a} = \dfrac{xz\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}+xy\,\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}.$

11. $\mathbf{a} = \left(xz-\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathbf{i}+\left(yz+\dfrac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k}.$

12. $\mathbf{a} = \dfrac{x^4+x^2y^2-y^2}{x\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{i}+\dfrac{y\left(x^2+y^2+1\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}.$

13. $\mathbf{a} = \dfrac{x^2\,\mathbf{i}+xy\,\mathbf{j}}{y\sqrt{x^2+y^2}}+z\left(x^2+y^2\right)\,\mathbf{k}.$

14. $\mathbf{a} = \left(x^2+y^2\right)\left(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}\right)+\dfrac{zx\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

15. $\mathbf{a} = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + \dfrac{y^2z^2}{x^2+y^2}\,\mathbf{k}$.

Задача 4.6. *Для векторного поля* $\mathbf{a}$, *заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и ротор в сферической системе координат:*

1. $\mathbf{a} = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **2.** $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3. $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **4.** $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$.

5. $\mathbf{a} = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + \sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2}$.

6. $\mathbf{a} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\left(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\right)$.

7. $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$.

8. $\mathbf{a} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - \left(x^2+y^2\right)\,\mathbf{k}\right)$.

9. $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$. **10.** $\mathbf{a} = \dfrac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$.

11. $\mathbf{a} = \dfrac{z\left(z+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\left(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}\right) + \dfrac{z^3 - \left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\,\mathbf{k}$.

12. $\mathbf{a} = \left(x + \dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right)\mathbf{i} + \left(y + \dfrac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right)\mathbf{j} +$
$$+\left(\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} - \frac{x^2+y^2}{z}\right)\mathbf{k}.$$

13. $\mathbf{a} = \dfrac{xyz\,\mathbf{i} + y^2z\,\mathbf{j} - y\left(x^2+y^2\right)\,\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

14. $\mathbf{a} = \left(x - \dfrac{y^2}{x\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathbf{i} + \left(y + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

15. $\mathbf{a} = \dfrac{xz - y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{yz + x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{j} -$
$$-\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}.$$

Глава 5

Интегральные теоремы векторного анализа

Основные формулы и определения

Теорема 5.1. *Пусть в плоской области D, ограниченной контуром L, задано плоское векторное поле* $\mathbf{a}$, *где компоненты поля непрерывны и имеют непрерывные частные производные. Тогда справедлива формула Грина*:

$$\oint\limits_L a_x\,dx + a_y\,dy = \int\limits_D \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dxdy.$$

Формула Грина связывает двойной интеграл по плоской области с криволинейным интегралом по контуру области. Она представляет собой частный случай **формулы Стокса**, которая связывает поверхностный интеграл II рода с криволинейным интегралом II рода.

Теорема 5.2. *Пусть компоненты векторного поля непрерывны и имеют непрерывные частные производные. Тогда циркуляция векторного поля* $\mathbf{a}$ *по любому замкнутому контуру L, равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность S, натянутую на этот контур*:

$$\oint\limits_L \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^\circ d\sigma.$$

Здесь предполагается, что ориентация нормали $\mathbf{n}^\circ$ к поверхности S согласована с ориентацией контура L так, чтобы из конца нормали обход контура в выбранном направлении был виден совершающимся против часовой стрелки.

Теорема 5.3. *Если в некоторой области пространства компоненты векторного поля непрерывны и имеют непрерывные частные производные, то поток векторного поля* $\mathbf{a}$ *через любую кусочно-гладкую поверхность* S*, расположенную в рассматриваемой области пространства, равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля* $\mathbf{a}$ *по объему* V*, ограниченному этой поверхностью* (*формула Остроградского*):

$$\int_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^\circ d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dxdydz.$$

Формула Остроградского связывает тройной интеграл по пространственной области с поверхностным интегралом по границе области.

Формулы Грина, Стокса и Остроградского объединены одной идеей: они выражают интеграл, распространенный на некоторый геометрический образ, через интеграл, взятый по границе этого образа. при этом формула Грина относится к случаю двумерного плоского пространства, формула Стокса — также к случаю двумерного, но «кривого» пространства, а формула Остроградского — к случаю трехмерного пространства. В общем случае интегральные теоремы векторного анализа решают задачу сведения интеграла любой кратности к интегралу меньшей кратности.

Аналогом этих формул для одномерного пространства является основная формула интегрального исчисления:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Здесь геометрическим образом, по которому берется интеграл, является отрезок $[a,\, b]$. Границами этого образа являются концы отрезка, точки $x = a$ $x = b$.

Практическое занятие

Задача 5.1. Используя теорему Остроградского-Гаусса

вычислить поток радиус-вектора $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ через заданную замкнутую поверхность в направлении внешней нормали:
1) сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ радиуса $R = 4$,
2) усечённый круговой цилиндр: $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = 5 - x - 2y$.

Решение: Вычислим дивергенцию поля радиус-вектора $\mathbf{r}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Воспользуемся векторной формой теоремы Остроградского: $\oint\limits_S \mathbf{a}\,d\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV$. Отсюда сразу получаем, что поток радиус-вектора через любую замкнутую поверхность равен утроенному объёму, ограниченному этой поверхностью: $\Pi = \iiint\limits_V 3\,dV = 3\,V$.

1) Пусть поверхность — сфера радиуса $R = 4$. Объём сферы равен: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256\pi}{3}$. Отсюда следует: $\Pi = 3V = 256\pi$.

2) Пусть поверхность — усечённый круговой цилиндр. Основание цилиндра — окружность $x^2 + y^2 = 4$, которая лежит в плоскости $z = 0$. Сверху цилиндр отсекается плоскостью $z = 5 - x - 2y$. Объём такого цилиндра равен: $V = \pi R^2 \frac{h_1 + h_2}{2}$. Высоту h_1 можно задать координатами точки $M_2(-2;0)$, тогда $z = h_1 = 5 - (-2) - 2\cdot 0 = 7$. Высоту h_2 можно задать координатами точки $M_2(2;0)$, тогда $z = h_2 = 5 - 2 - 0 = 3$ Тогда поток равен: $\Pi = 3\pi R^2 \frac{h_1 + h_2}{2} = 15\pi 2^2 = 60\pi$. h_1 и h_2 можно также находить из координат точек $N_1 = (0;-2)$, тогда $h_1 = 5 - 0 + 4 = 9$ и $N_2 = (0;2)$, тогда $h_2 = 5 - 0 - 4 = 1$, отсюда: $\frac{h_1 + h_2}{2} = 5$.

Задача 5.2. Используя теорему Остроградского-Гаусса вычислить в направлении внешней нормали поток векторного поля $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} - z^2\,\mathbf{k}$ через поверхность параллелепипеда ограниченного плоскостями: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $z_1 = 2$, $z_2 = 4$.

Решение: Вычислим дивергенцию заданного векторного поля: $\operatorname{div}\mathbf{a} = 2x + 2y - 2z$. Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\Pi = \oint\limits_S \mathbf{a}\, d\sigma = \oint\limits_S \mathbf{a}\,\mathbf{n}^\circ\, d\sigma = \iiint\limits_V (2x + 2y - 2z)\; dV.$$

Так как заданная поверхность параллелепипед, вычисление тройного интеграла удобно проводить в декартовой системе координат. Тогда элемент объёма равен: $dV = dxdydz$. Согласно свойству линейности, постоянный множитель можно вынести за знак интеграла. В результате получим:

$$\Pi = 2\iiint\limits_V (x + y - z)\; dx\, dy\, dz.$$

Полученный тройной интеграл сводится к вычислению трёх однократных интегралов, для которых необходимо расставить соответствующие пределы интегрирования, заданные по условию задачи. Тогда:

$$\Pi = 2\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2}^{4} (x + y - z)\; dz.$$

Вычислим каждый из повторных интегралов отдельно:

1) $\displaystyle\int\limits_{2}^{4} (x + y - z)\; dz = 2x + 2y - 6,$

2) $\displaystyle 2\int\limits_{0}^{1} (x + y - 3)\; dy = 2\left(x - \frac{5}{2}\right),$

3) $\displaystyle 2\int\limits_{-1}^{2} \left(x - \frac{5}{2}\right)\; dx = -12.$

Итак, поток векторного поля равен: $\Pi = 2\cdot(-12) = -24$.

Задача 5.3. Применяя формулу Грина вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = y\left(2x - y^2 - 1\right)\,\mathbf{i} + x\left(x - 3y^2\right)\,\mathbf{j}$ по заданному контуру:
1) контур параллелограмм, ограниченный прямыми: $y = 2$, $y = 5$, $y = x$, $y = x - 3$,
2) контур эллипс: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Решение: Для решения задачи воспользуемся формулой Грина:

$$\oint\limits_L a_x\,dx + a_y\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\,dx\,dy.$$

Заданное векторное поле имеет следующие компоненты:

$$a_x = y\left(2x - y^2 - 1\right), \qquad a_y = x\left(x - 3y^2\right).$$

Найдём частные производные: $\dfrac{\partial a_y}{\partial x} = 2x - 3y^2$, $\dfrac{\partial a_x}{\partial y} = 2x - 3y^2 - 1$, и составим разность: $\dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y} = 1$, которая является подынтегральной функцией в правой части формулы Грина. Тогда для циркуляции векторного поля получим: $C = \iint\limits_D dx\,dy$. Этот интеграл есть площадь плоской фигуры, ограниченной заданным контуром.

1) Пусть контур параллелограмм ограничен прямыми: $y = 2$, $y = 5$, $y = x$, $y = x - 3$. Построим график и обозначим вершины параллелограмма A, B, C, D. Найдём его площадь $S = ah$, здесь: $a = |AB| = 3$, $h = |BD| = 3 \Rightarrow S = 3\cdot 3 = 9\,(\text{ед.})^2$.

2) Пусть контур эллипс заданный уравнением: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Найдём площадь эллипса по формуле $S = \pi ab$, здесь $a = 3$, $b = 4$. Отсюда: $S = \pi\cdot 3\cdot 4 = 12\pi$. Эту задачу можно также решать непосредственно, вычисляя криволинейный интеграл в левой части формулы Грина. Однако, если применить формулу Грина вычисления значительно упрощаются.

Задача 5.4. Используя теорему Стокса найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = \left(x^3 + z\right)\mathbf{i} + \left(y^3 + x\right)\mathbf{j} + \left(z^3 + y\right)\mathbf{k}$ по заданному контуру, являющемуся линией пересечения плоскости $4x + 4y + z = 4$ с координатными плоскостями:

Решение: Вычислим ротор заданного векторного поля. Компонентами поля являются функции: $a_x = x^3 + z$, $a_y = y^3 + x$, $a_z = z^3 + y$. Тогда:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3 + z & y^3 + x & z^3 + y \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Для решения задачи воспользуемся теоремой Стокса: $\oint\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ\, d\sigma = \oint\limits_L \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$. Отсюда видно, что нужно найти координаты единичного вектора нормали $\mathbf{n}^\circ$ к уравнению плоскости, на которой лежит заданный контур. Пусть заданная поверхность, т. е. плоскость $4x + 4y + z = 4$, проектируется на координатную плоскость xOy. Тогда: $z = 4 - 4x - 4y$,

$$\mathbf{n}^\circ = \pm\frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|}, \qquad \cos\alpha = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = \frac{4}{\sqrt{33}},$$

$$\cos\beta = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = \frac{4}{\sqrt{33}}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{33}}.$$

Вычислим теперь скалярное произведение:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\left(\frac{4}{\sqrt{33}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{33}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{33}}\mathbf{k}\right) = \frac{9}{\sqrt{33}}.$$

Таким образом: $C = \oint\limits_L \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \dfrac{9}{\sqrt{33}} \iint\limits_S d\sigma.$

От интеграла по поверхности переходим теперь к двойному интегралу, который вычисляется по плоской области. Это означает, что в уравнении заданной плоскости полагаем $z = 0$. Отсюда следует: $x + y = 1$. Таким образом, область интегрирования это треугольник, где переменная x изменяется от $0 \leqslant x \leqslant 1$, а переменная y: $0 \leqslant y \leqslant 1-x$. Тогда:

$$\frac{9}{\sqrt{33}} \iint\limits_S d\sigma = \frac{9}{\sqrt{33}} \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = 9 \iint\limits_D dx\,dy = 9 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy = \frac{9}{2}.$$

Задача 5.5. Используя формулу Стокса вычислить поток ротора векторного поля $\mathbf{a}$ из предыдущей задачи через часть поверхности $z = 5\left(4 - x^2 - y^2\right)$, расположенной над координатной плоскостью xOy:

Решение: Воспользуемся теоремой Стокса: $\oint\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^\circ\, d\sigma = \oint\limits_L \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$. Тогда искомый поток равен циркуляции заданного векторного поля вдоль замкнутого контура, расположенного на границе этой поверхности. Контур L является границей проекции поверхности на координатную плоскость xOy, т. е. мы в уравнении поверхности $z = 5\left(4 - x^2 - y^2\right)$ должны положить $z = 0$. Тогда уравнение контура L будет $L := \{x^2 + y^2 = 4\}$. Это есть уравнение окружности с радиусом равным $R = 2$.

Вычислим скалярное произведение: $\mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \left(x^3 + z\right)\, dx + \left(y^3 + x\right)\, dy + \left(z^3 + y\right)\, dz$.

Так как контур расположен в плоскости xOy, то $z = 0$. Тогда $dz = 0$ также равно нулю. Отсюда: $\mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \left(x^3\right)\, dx + \left(y^3 + x\right)\, dy$.

Запишем уравнение окружности в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -2\sin t\, dt, \\ dy = 2\cos t\, dt, \end{cases}$$

где параметр t изменяется от $0 \leqslant t < 2\pi$. Вычислим теперь циркуляцию:

$$C = \oint\limits_L x^3\, dx + \left(y^3 + x\right)\, dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-16\cos^3 t\sin t + \left(8\sin^3 t + 2\cos t\right) 2\cos t\right)\, dt = 4\pi.$$

Варианты контрольных работ

Задача 5.1. *Используя теорему Остроградского-Гаусса вычислить поток радиус вектора* $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ *через заданную замкнутую поверхность в направлении внешней нормали:*

1. $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1.$

2. $x^2 + y^2 + z^2 = 4.$

3. $x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 0.$

4. $z = x^2 + \dfrac{y^2}{4}, \quad z = 3.$ — эллиптический параболоид.

5. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad z = 1, \quad z = 4.$ — эллиптический цилиндр.

6. пирамида, основание которой прямоугольник с $a = 1$, $b = 2$, высота пирамиды $h = 3$.

7. тор, $R_1 = 1$, $R_2 = 3$ — внутренний и внешний радиусы тора.
$V = \dfrac{\pi^2}{4}\,(R_2 - R_1)^2\,(R_2 + R_1)$

8. пирамида, основание параллелограмм с $a = 3$, $h = 1$, высота пирамиды $H = 4$.

9. $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3 + 2\,x - 2\,y.$ — усечённый круговой цилиндр.

10. тор, $R_1 = 3$, $R_2 = 4$ — внутренний и внешний радиусы тора.
$V = \dfrac{\pi^2}{4}\,(R_2 - R_1)^2\,(R_2 + R_1)$

11. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad z = 1, \quad z = 2$ – эллиптический цилиндр.

12. $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}, \qquad z = 4$ — эллиптический параболоид.

13. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 - \dfrac{z^2}{25} = 0$ — конус.

14. $x^2 + y^2 + z^2 = 9.$

15. $\dfrac{x^2}{4} + 4\,y^2 + z^2 = 1.$

Задача 5.2. *Используя теорему Остроградского-Гаусса* *вычислить поток векторного поля* **a** *в направлении внешней нормали через заданную замкнутую поверхность:*

1. $\mathbf{a} = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} - z^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant a, \quad 0 \leqslant z \leqslant a.$
2. $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} - z^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 5, \quad 0 \leqslant y \leqslant 4, \quad 0 \leqslant z \leqslant 3.$
3. $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad 3 \leqslant y \leqslant 4, \quad 5 \leqslant z \leqslant 6.$
4. $\mathbf{a} = (x+y)\,\mathbf{i} + (y-z)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant 4,$
$0 \leqslant z \leqslant 3.$
5. $\mathbf{a} = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}, \quad 2 \leqslant x \leqslant 4, \quad 2 \leqslant y \leqslant 4, \quad 3 \leqslant z \leqslant 5.$
6. $\mathbf{a} = xz\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} - yz\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c.$
7. $\mathbf{a} = x^2y\,\mathbf{i} + zy^2\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 3,\ 2 \leqslant z \leqslant 4.$
8. $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}, \quad 4 \leqslant x \leqslant 5, \quad 0 \leqslant y \leqslant 4, \quad 1 \leqslant z \leqslant 3.$
9. $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3, \quad 1 \leqslant y \leqslant 3, \quad 1 \leqslant z \leqslant 3.$
10. $\mathbf{a} = x^3\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 4, \quad 0 \leqslant z \leqslant 3.$
11. $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} - y^3\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2,\ -2 \leqslant z \leqslant 0.$
12. $\mathbf{a} = x^3\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - z^2\,\mathbf{k}, \quad -2 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 4, \quad 1 \leqslant z \leqslant 3.$
13. $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} - y^3\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}, \ -3 \leqslant x \leqslant -1,\ -2 \leqslant y \leqslant 0,\ -1 \leqslant z \leqslant 1.$
14. $\mathbf{a} = x^4\,\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z^2\,\mathbf{k}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 1 \leqslant z \leqslant 3.$
15. $\mathbf{a} = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} - z^4\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2, \quad 0 \leqslant z \leqslant 2.$

Задача 5.3. *Применяя формулу Грина вычислить циркуляцию векторного поля* **a** *по заданному контуру* L*:*

1. $\mathbf{a} = \left(x - y^2\right)\,\mathbf{i} + 2\,xy\,\mathbf{j}, \quad L:\ \{x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6\}.$
2. $\mathbf{a} = (2\,x - 5\,y)\,\mathbf{i} + (y - 4\,x)\,\mathbf{j}, \quad L:\ \{x^2 + y^2 = 4\}.$
3. $\mathbf{a} = \left(2\,y + x^2\right)\,\mathbf{i} + \left(5x - 4y^2\right)\,\mathbf{j},\ L: \{x = 0,\ y = 5,\ x = 3,\ y = 0\}.$
4. $\mathbf{a} = y\,(1 + 2\,x)\,\mathbf{i} + x\,(2 + x)\,\mathbf{j}, \quad L:\ \left\{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}.$
5. $\mathbf{a} = (x + y)\,\mathbf{i} + (y - x)\,\mathbf{j},\ L: \{y = 0,\, y = 2,\, y = x,\, y = x - 4\}.$
6. $\mathbf{a} = \left(x^3 - y^2\right)\,\mathbf{i} + x\,(1 - 2y)\,\mathbf{j},\ L: \{x = 1,\ y = 0,\ 2x + y = 4\}.$
7. $\mathbf{a} = -y^2\,\mathbf{i} + x\,(3 - 2\,y)\,\mathbf{j}, \quad L:\ \{(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9\}.$
8. $\mathbf{a} = \left(y^3 + x^3\right)\,\mathbf{i} + x\,\left(3y^2 - 1\right)\,\mathbf{j},$
$L:\ \{x = 1, \quad x = 5, \quad y = 0, \quad y = 4\}.$
9. $\mathbf{a} = (3x - 7\,y)\,\mathbf{i} + (2y - 6\,x)\,\mathbf{j}, \quad L: \left\{x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}.$
10. $\mathbf{a} = \left(x^4 - 5\,y\right)\,\mathbf{i} + \left(y^4 - 4\,x\right)\,\mathbf{j},$
$L:\ \{y = 1, \quad y = 4, \quad y = x, \quad y = x - 4\}.$

11. $\mathbf{a} = \left(3\,x^2 - 4\,y^3\right)\mathbf{i} - 3\,x\left(1 + 4\,y^2\right)\mathbf{j}$,
$$L:\ \{x = 1, \quad y = 1, \quad y = 6 - x\}.$$
12. $\mathbf{a} = (x + 5\,y)\ \mathbf{i} + \left(6\,x - 4\,y^2\right)\ \mathbf{j},\ L: \{x^2 + y^2 = 2\}$.
13. $\mathbf{a} = \left(5\,x^3 - y^2\right)\ \mathbf{i} + y\,(y - 3\,x)\ \mathbf{j}$,
$$L:\ \{y = 0, \quad y = 4, \quad x = 0, \quad x = 3\}.$$
14. $\mathbf{a} = \left(x^2 - y^2 - y\right)\ \mathbf{i} + \left(y^2 + 2\,xy + x\right)\ \mathbf{j},\ L: \left\{\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1\right\}.$
15. $\mathbf{a} = \left(y + x^2\right)\ \mathbf{i} + x\,(1 + y)\ \mathbf{j}$,
$$L:\ \{y = 0, \quad y = 1, \quad x = 2\,y, \quad x = 2\,y + 6\}.$$

Задача 5.4. *Используя теорему Стокса найти циркуляцию векторного поля* $\mathbf{a}$ *по заданному контуру, являющемуся линией пересечения плоскости* P *с координатными плоскостями:*

1. $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k},\ P:\ \{3\,x - y + 2\,z = 4\}$.
2. $\mathbf{a} = \left(x^2 + y\right)\ \mathbf{i} + \left(y^2 + z^2\right)\ \mathbf{j} + z\left(2y - z^2\right)\mathbf{k}$,
$P: \{12x + 10y + 15z = 60\}$.
3. $\mathbf{a} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k},\ P: \{5\,x + 3\,y - 5\,z = 15\}$.
4. $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + (x + y)\ \mathbf{k}, \quad P: \{4\,x - y - 2\,z = -8\}$.
5. $\mathbf{a} = z^2\,\mathbf{i}, \quad P: \{15\,x - 12\,y + 10\,z = 60\}$.
6. $\mathbf{a} = y^2\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j}, \quad P: \{4\,x - 3\,y + 3\,z = 12\}$.
7. $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad P: \{-8\,x - 4\,y + 3\,z = 24\}$.
8. $\mathbf{a} = z^2\,\mathbf{i} + (x + z)\ \mathbf{j} + (x + y)\ \mathbf{k}, \quad P: \{3\,x + y - 6\,z = 6\}$.
9. $\mathbf{a} = \left(x^4 + y\right)\ \mathbf{i} + \left(y^3 - z^2\right)\ \mathbf{j} + z\left(z^2 - 2y\right)\mathbf{k}$,
$$P: \{4\,x + 4\,y + z\ =\ 4\}.$$
10. $\mathbf{a} = x\left(x^2 - 2\,y\right)\ \mathbf{i} + \left(y^3 - x^2\right)\ \mathbf{j} + \left(z^3 + y\right)\mathbf{k}$,
$$P: \{10\,x + 5\,y + 4\,z = 20\}.$$
11. $\mathbf{a} = \left(x^3 - y^2\right)\ \mathbf{i} + y\left(y^2 - 2\,x\right)\ \mathbf{j} + \left(z^3 + 2\,x\right)\mathbf{k}$,
$$P: \{4\,x - 5\,y - 10\,z = 20\}.$$
12. $\mathbf{a} = \left(x^3 - z\right)\ \mathbf{i} + \left(y^3 - z\right)\ \mathbf{j} + \left(z^3 - x\right)\ \mathbf{k}$,
$$P: \{6\,x - 3\,y + 2\,z = 6\}.$$
13. $\mathbf{a} = \left(x^2 - 4\,z\right)\ \mathbf{i} + \left(y^2 - 2\,z\right)\ \mathbf{j} + \left(z^2 - 4\,x\right)\mathbf{k}$,
$$P: \{4\,x + 6\,y + 3\,z = 12\}.$$
14. $\mathbf{a} = \left(x^4 - z\right)\ \mathbf{i} + \left(y^4 - x\right)\ \mathbf{j} + \left(z^4 - y\right)\ \mathbf{k}$,
$$P: \{15x - 6y + 5z = 30\}.$$
15. $\mathbf{a} = \left(2\,y - x^2\right)\ \mathbf{i} + \left(z - y^2\right)\ \mathbf{j} + \left(z^2 - 3\,x\right)\mathbf{k}$,
$$P: \{7x - y + 7z = 7\}.$$

Задача 5.5. *Используя формулу Стокса вычислить поток ротора векторного поля* **a** *через часть поверхности* S, *расположенной над заданной координатной плоскостью* P:

1. $\mathbf{a} = \left(yx^2 + z^2\right)\mathbf{i} + (y+z)\,\mathbf{j} + \left(x^3 + y^2 z\right)\mathbf{k}$,
$S:\ \{z = 3(4 - x^2 - y^2)\}$, $\quad P:\ \{xOy\}$.

2. $\mathbf{a} = (y + 2\,x)\,\mathbf{i} + x^2 z^2\,\mathbf{j} + \left(x^2 + y^2\right)\mathbf{k}$,
$S:\ \{2\,z = 1 - x^2 - y^2\}$, $\quad P:\ \{xOy\}$.

3. $\mathbf{a} = x^3 z\,\mathbf{i} + \left(y^2 + z^2\right)\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
$S:\ \{y = 2(9 - x^2 - z^2)\}$, $\quad P:\ \{xOz\}$.

4. $\mathbf{a} = \left(x^3 + z\right)\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} + yz^2\,\mathbf{k}$,
$S:\ \{2\,y = 1 - x^2 - z^2\}$, $\quad P:\ \{xOz\}$.

5. $\mathbf{a} = \left(y^2 + 3\,z\right)\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + (2\,y - z)\,\mathbf{k}$,
$S:\{x = 2\left(1 - y^2 - z^2\right)\}$, $\quad P:\{yOz\}$.

6. $\mathbf{a} = \left(x^3 - z^2\right)\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + 5\,y\,\mathbf{k}$,
$S:\ \{3\,x = 4 - y^2 - z^2\}$, $\quad P:\ \{yOz\}$.

7. $\mathbf{a} = \left(x^2 + y^2\right)\mathbf{i} + zy^2\,\mathbf{j} - x^2 y\,\mathbf{k}$,
$S:\ \{z = 9 - (x-1)^2 - (y-1)^2\}$, $\quad P:\ \{xOy\}$.

8. $\mathbf{a} = \left(x^2 + y\right)\mathbf{i} + \left(y^2 + z^2\right)\mathbf{j} + \left(z^2 + x\right)\mathbf{k}$,
$S:\ \{3\,z = 1 - (x+1)^2 - (y+1)^2\}$, $\quad P:\ \{xOy\}$.

9. $\mathbf{a} = \left(z^2 + y\right)\mathbf{i} + (x + z - y)\,\mathbf{j} + \left(y^2 + x\right)\mathbf{k}$,
$S:\ \{y = 1 - (x-1)^2 - (z+1)^2\}$, $\quad P:\ \{xOz\}$.

10. $\mathbf{a} = \left(x^2 + y\right)\mathbf{i} - x^3 y^2 z\,\mathbf{j} + \left(y^2 + xz\right)\mathbf{k}$,
$S:\ \{2\,y = 1 - (x+1)^2 - (z-1)^2\}$, $\quad P:\ \{xOz\}$.

11. $\mathbf{a} = (2\,x + y\,z)\,\mathbf{i} + (y - 3\,z)\,\mathbf{j} + (2\,y + z)\,\mathbf{k}$,
$S:\ \{x = 1 - (y-2)^2 - (z-2)^2\}$, $\quad P:\ \{yOz\}$.

12. $\mathbf{a} = (1 + x\,y\,z)\,\mathbf{i} + (2\,y + 3\,z)\,\mathbf{j} + (y - z)\,\mathbf{k}$,
$S:\ \{2\,x = 4 - (y+2)^2 - (z+2)^2\}$, $\quad P:\ \{yOz\}$.

13. $\mathbf{a} = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + x^3 y^3\,\mathbf{k}$,
$S:\ \{z = 5\left(16 - x^2 - y^2\right)\}$, $\quad P:\ \{xOy\}$.

14. $\mathbf{a} = (z - 3\,x)\,\mathbf{i} + \left(y^2 - x\,z\right)\mathbf{j} + y\,x^2\,\mathbf{k}$,
$S:\ \{3\,y = 16 - x^2 - z^2\}$, $\quad P:\ \{xOz\}$.

15. $\mathbf{a} = \left(x^2 + y^2 - z^2\right)\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,
$S:\ \{2\,x = 16 - y^2 - z^2\}$, $\quad P:\ \{yOz\}$.

Глава 6

Дифференциальные операции второго порядка

Основные формулы и определения

Многие операции векторного анализа могут быть записаны в сокращённой и удобной для расчётов форме с помощью символического **оператора Гамильтона** «набла»:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

В рамках векторной алгебры формальные операции над оператором «набла» проводятся так, как если бы он был вектором. Тогда $\nabla u = \operatorname{grad} u$, $(\nabla, \mathbf{a}) = \operatorname{div}\mathbf{a}$, $[\nabla, \mathbf{a}] = \operatorname{rot}\mathbf{a}$. Дифференциальные операции второго порядка получаются в результате двукратного применения к полям оператора ∇. Всего можно составить из них девять пар. Применительно с скалярному полю имеют смысл только две операции: $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$ и $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$. Применительно с векторному полю имеют смысл три операции: $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$. Остальные четыре операции смысла не имеют.

В векторном поле ∇u оператор ∇, применённый повторно даёт скалярное поле: $(\nabla, \nabla u) = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$.

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

здесь символ, представленный как скалярное произведение оператора Гамильтона на самого себя $(\nabla, \nabla) \equiv \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, называется **оператором Лапласа**.

Практическое занятие

Задача 6.1. Для заданных скалярного $u = x^5 + y^5 + z^5$ и векторного $\mathbf{a} = ze^x\,\mathbf{i} + xe^y\,\mathbf{j} + ye^z\,\mathbf{k}$ полей найти: 1) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$, 2) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, 3) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

Решение: 1) Пусть $\operatorname{div}\mathbf{a} = f$. Тогда:
$f = (ze^x)'_x + (xe^y)'_y + (ye^z)'_z = ze^x + xe^y + ye^z$.
$\operatorname{grad} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$.

Вычислим частные производные функции f:
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = ze^x + e^y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xe^y + e^z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = ye^z + e^x$.
Отсюда следует:
$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} = (ze^x + e^y)\,\mathbf{i} + (xe^y + e^z)\,\mathbf{j} + (ye^z + e^x)\,\mathbf{k}$.
2) Находим частные производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 20x^3, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 20y^3, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 20z^3.$$

Отсюда следует: $\Delta u = 20\left(x^3 + y^3 + z^3\right)$
3) Ещё одна операция второго порядка $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla \times \times (\nabla \times \mathbf{a}) \equiv [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]]$. Воспользуемся формулой для двойного векторного произведения, записанной в виде: $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = = \mathbf{B}\,(\mathbf{A}\,\mathbf{C}) - (\mathbf{A}\,\mathbf{B})\,\mathbf{C}$. Заменяя в этой формуле $\mathbf{A}$ на ∇, $\mathbf{B}$ на ∇, $\mathbf{C}$ на $\mathbf{a}$, получим: $[\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla\,(\nabla\,\mathbf{a}) - (\nabla\,\nabla)\,\mathbf{a} = \nabla\,(\nabla\,\mathbf{a}) - \Delta\mathbf{a}$. Тогда окончательно получаем:

$$\boxed{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}.}$$

$$\Delta\mathbf{a} = \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} + \\ + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.$$

$\Delta\mathbf{a} = (ze^x + 0 + 0)\,\mathbf{i} + (0 + xe^y + 0)\,\mathbf{j} + (0 + 0 + ye^z)\,\mathbf{k}$.
Тогда: $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = e^y\,\mathbf{i} + e^z\,\mathbf{j} + e^x\,\mathbf{k}$.

Задача 6.2. Используя свойства оператора Гамильтона для скалярного $u = x + y + z$ и векторного $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ полей найти: 1) $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a})$, 2) $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a})$

Решение: 1) Если оператор Гамильтона действует на какое-либо произведение в первую очередь учитывается его дифференциальный характер (по правилу дифференцирования произведения), а потом уже векторные свойства. В начале подействуем оператором ∇ на скалярную функцию u (обозначается стрелкой сверху), а затем на векторную $\mathbf{a}$:

$$\boxed{\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = \nabla\,(u\,\mathbf{a}) = \nabla\,(\overset{\downarrow}{u}\,\mathbf{a}) + \nabla\,(u\,\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = \mathbf{a}\operatorname{grad} u + u\operatorname{div}\mathbf{a}.}$$

$\operatorname{grad} u = (x + y + z)'_x\ \mathbf{i} + (x + y + z)'_y\ \mathbf{j} + (x + y + z)'_z\ \mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + {}$ $+\ \mathbf{k}$. $\quad \operatorname{div}\mathbf{a} = (x)'_x + (y)'_y + (z)'_z = 3.$

Используя формулу скалярного произведения двух векторов вычисляем: $\mathbf{a}\operatorname{grad} u = x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = x + y + z$. Совершаем подстановку: $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 4\,(x + y + z)$.

2) $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = \nabla \times (u\,\mathbf{a}) = \nabla \times (\overset{\downarrow}{u}\,\mathbf{a}) + \nabla \times (u\,\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = \operatorname{grad} u \times \mathbf{a} + u\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0}, \text{ тогда: } u\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

$$\operatorname{grad} u \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z} \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z - y)\ \mathbf{i} + (x - z)\ \mathbf{j} + (y - x)\ \mathbf{k}.$$

Отсюда следует: $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (z - y)\ \mathbf{i} + (x - z)\ \mathbf{j} + (y - x)\ \mathbf{k}$.

Задача 6.3. Для скалярного поля u, заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и Лапласиан в цилиндрической системе координат: $u = \left(x^2 + y^2\right) z$.

Решение: Связь декартовых координат с цилиндрическими определяется формулами:

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi, \qquad z = z.$$

Отсюда находим выражение заданного поля в цилиндрической системе координат: $u = \left(x^2 + y^2\right) z = \rho^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) z = \rho^2 z$.

Лапласиан скалярного поля в цилиндрической системе координат вычисляется по формуле:

$$\boxed{\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.}$$

Вычисляем производные: $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \left(\rho^2 z\right)'_z = \rho^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = 2\rho z$, $\dfrac{\partial (2\rho^2 z)}{\partial \rho} = 4\rho z$. Тогда: $\Delta u = \dfrac{1}{\rho} 4\rho z + 0 + 0 = 4z$.

Задача 6.4. Перейти к сферическим координатам в выражении скалярного поля u и найти Лапласиан этого поля в сферической системе координат: $u = \left(x^2 + y^2\right) z$.

Решение: Связь декартовых координат со сферическими определяется формулами:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Отсюда находим выражение заданного поля в сферической системе координат: $u = \left(x^2 + y^2\right) z = r^2 \left(\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi\right) r \cos \theta = r^3 \sin^2 \theta \cos \theta$.

Лапласиан скалярного поля в сферической системе координат вычисляется по формуле:

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Подставляя в это выражение функцию u получаем: $\Delta u = 4r \cos \theta$.

Задача 6.5. Для векторного поля $\mathbf{a}$ найти: $\mathbf{b} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = \left(\sin x + 2y^2 - z^3\right)\mathbf{i} + \left(\cos y - x^3 + 3z^2\right)\mathbf{j} + \left(\sin z + 4x^2 - y^3\right)\mathbf{k}$.

Решение: Операция $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$ является дифференциальной операцией третьего порядка. Задачу можно решать непосредственно применяя операцию rot к заданному полю $\mathbf{a}$. Однако трёхкратное применение операции rot приводит к громоздким вычислениям. Выразив данные операции с помощью оператора Гамильтона можно упростить задачу. Применим формулу из решения задачи 1:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla,\, \mathbf{a}) - (\nabla,\, \nabla)\,\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}.$$

Получим: $\boxed{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \operatorname{rot}\Delta\mathbf{a}.}$ Поле $\operatorname{div}\mathbf{a}$ является скалярным. Вычислим операцию $\operatorname{rot}\operatorname{grad}$ к произвольному скалярному полю φ: $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = [\nabla,\, \nabla\varphi] = [\nabla,\, \nabla]\,\varphi = \mathbf{0}$, так как векторное произведение любого вектора на самого себя равно нулю (в том числе вектора ∇). Отсюда следует: $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} = \mathbf{0}$. В результате получаем, что задача сводится к вычислению ротора лапласиана заданного векторного поля: $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\operatorname{rot}\Delta\mathbf{a}$. Применяя формулу из задачи 1 для $\Delta\mathbf{a}$ получим: $\dfrac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} = -\sin x$, $\dfrac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} = 4$, $\dfrac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} = -6z$, $\dfrac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} = -6x$, $\dfrac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} = -\cos y$, $\dfrac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} = 6$, $\dfrac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} = 8$, $\dfrac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} = -6y$, $\dfrac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} = -\sin z$.

$\Delta\mathbf{a} = (4 - 6z - \sin x)\,\mathbf{i} + (6 - 6x - \cos y)\,\mathbf{j} + (8 - 6y - \sin z)\,\mathbf{k}$.

Тогда: $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\operatorname{rot}\Delta\mathbf{a} = 6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$.

Варианты контрольных работ

Задача 6.1. *Для заданных скалярного u и векторного $\mathbf{a}$ полей найти:* 1) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$, 2) $\operatorname{div}\operatorname{grad}u$, 3) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$:

1. $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}, \qquad u = x\,z + y\,z.$

2. $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \qquad u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$

3. $\mathbf{a} = x\,y\,\mathbf{i} + y\,z\,\mathbf{j} + x\,z\,\mathbf{k}, \qquad u = x\,y\,z.$

4. $\mathbf{a}=(x-y)\,\mathbf{i}+(y-z)\,\mathbf{j}+(z-x)\,\mathbf{k}, \qquad u=z\,(x-y)\,.$
5. $\mathbf{a}=(x-z)\,\mathbf{i}+(y-z)\,\mathbf{j}+(z-y)\,\mathbf{k}, \qquad u=x+y+z.$
6. $\mathbf{a}=(x+y)\,\mathbf{i}+(y+z)\,\mathbf{j}+(z+x)\,\mathbf{k}, \qquad u=x^2+y^2+z^2.$
7. $\mathbf{a}=(x+z)\,\mathbf{i}+(y+x)\,\mathbf{j}+(z+y)\,\mathbf{k}, \qquad u=x^2-y^2-z^2.$
8. $\mathbf{a}=x\,z\,\mathbf{i}+y\,x\,\mathbf{j}+y\,z\,\mathbf{k}, \qquad u=\ln(x\,y\,z)\,.$
9. $\mathbf{a}=\dfrac{x}{y}\,\mathbf{i}+\dfrac{y}{z}\,\mathbf{j}+\dfrac{z}{x}\,\mathbf{k}, \qquad u=x^2y^2z^2.$
10. $\mathbf{a}=y^3\,\mathbf{i}+x^3\,\mathbf{j}+z^3\,\mathbf{k}, \qquad u=x\,y\,z.$
11. $\mathbf{a}=\ln\,y\,\mathbf{i}+\ln\,x\,\mathbf{j}+\ln\,z\,\mathbf{k}, \qquad u=\ln(x\,y)\,.$
12. $\mathbf{a}=e^x\,\mathbf{i}+e^y\,\mathbf{j}+e^z\,\mathbf{k}, \qquad u=x+y+z.$
13. $\mathbf{a}=e^{z-y}\,\mathbf{i}+e^{x-z}\,\mathbf{j}+e^{y-x}\,\mathbf{k}, \qquad u=e^{x+y+z}.$
14. $\mathbf{a}=e^{y-z}\,\mathbf{i}+e^{z-x}\,\mathbf{j}+e^{x-y}\,\mathbf{k}, \qquad u=u=e^{x-y+z}.$
15. $\mathbf{a}=\dfrac{x}{z}\,\mathbf{i}+\dfrac{y}{x}\,\mathbf{j}+\dfrac{z}{y}\,\mathbf{k}, \qquad u=x\,y+z^2.$

Задача 6.2. *Используя свойства оператора Гамильтона для скалярного u и векторного* $\mathbf{a}$ *полей из предыдущей задачи найти:* 1) $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a})$, 2) $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a})$ *в точке* $M\,(1;1;1)$.

Задача 6.3. *Для скалярного поля u, заданного в декартовой системе координат, найти выражение этого поля и Лапласиан в цилиндрической системе координат:*

1. $u=z^2\sqrt{x^2+y^2}.$ **2.** $u=\dfrac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$ **3.** $u=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{z}.$

4. $u=\sqrt{x^2+y^2-z^2}.$ **5.** $u=z\left(\dfrac{x}{y}+x\,y\right).$

6. $u=x\,y\,z+z\left(x^2+y^2\right).$ **7.** $u=x\,y+z\sqrt{x^2+y^2}.$

8. $u=\dfrac{x\,y\,z}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}.$ **9.** $u=z\ln\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right).$

10. $u=z\ln\left(\dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$ **11.** $u=\sin\left(z+\sqrt{x^2+y^2}\right).$

12. $u=\cos\left(x^2+y^2-z^2\right).$ **13.** $u=e^{z\sqrt{x^2+y^2}}.$

14. $u=2\,x\,y+z^2\left(x^2+y^2\right).$ **15.** $u=\dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Задача 6.4. *Перейти к сферическим координатам в выражении скалярного поля u и найти Лапласиан этого поля в сферической системе координат:*

1. $u = \ln\left(x^2+y^2+z^2\right).$ **2.** $u = \dfrac{z^3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$

3. $u = \dfrac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{z^2}.$ **4.** $u = \dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}.$

5. $u = \dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$ **6.** $u = \ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\right).$

7. $u = \ln\left(1+\dfrac{z^2}{x^2+y^2}\right).$ **8.** $u = \dfrac{z^2}{x^2+y^2}.$ **9.** $u = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right).$

10. $u = e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$ **11.** $u = \sin\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$

12. $u = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2}.$ **13.** $u = \dfrac{x^2+y^2}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

14. $u = \dfrac{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2}.$ **15.** $u = \left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\right)^2.$

Задача 6.5. *Для векторного поля* $\mathbf{a}$ *найти:* $\mathbf{b} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$*:*

1. $\mathbf{a} = z^3\,\mathbf{i} + \left(x^3-y^2\right)\,\mathbf{j} + x^3\,\mathbf{k}.$
2. $\mathbf{a} = \sin y\,\mathbf{i} + \cos z\,\mathbf{j} + x^3\,\mathbf{k}.$ **3.** $\mathbf{a} = \ln y\,\mathbf{i} + \ln z\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}.$
4. $\mathbf{a} = e^y\,\mathbf{i} + e^z\,\mathbf{j} - e^{2x}\,\mathbf{k}.$ **5.** $\mathbf{a} = \sqrt{z}\,\mathbf{i} + \sqrt{x}\,\mathbf{j} + \sqrt{y}\,\mathbf{k}.$
6. $\mathbf{a} = \operatorname{sh} z\,\mathbf{i} + \operatorname{sh} x\,\mathbf{j} + \operatorname{sh} y\,\mathbf{k}.$
7. $\mathbf{a} = \operatorname{arctg} x\,\mathbf{i} + \operatorname{arctg} y\,\mathbf{j} + \operatorname{arctg} z\,\mathbf{k}.$
8. $\mathbf{a} = \operatorname{ch} z\,\mathbf{i} + \operatorname{ch} y\,\mathbf{j} + \operatorname{ch} x\,\mathbf{k},.$
9. $\mathbf{a} = e^z\,\mathbf{i} + (\sqrt{y}+\sin y)\,\mathbf{j} + e^x\,\mathbf{k}.$
10. $\mathbf{a} = \left(y^3+z\right)\,\mathbf{i} + \left(z^3-x\right)\,\mathbf{j} + \left(x^3+y\right)\,\mathbf{k}.$
11. $\mathbf{a} = \left(x^3-y^3\right)\,\mathbf{i} + \left(y^3-z^3\right)\,\mathbf{j} + \left(z^3-x^3\right)\,\mathbf{k}.$
12. $\mathbf{a} = \ln(x-2)\,\mathbf{i} + \ln z\,\mathbf{j} + \ln 2x\,\mathbf{k}.$
13. $\mathbf{a} = \ln 3x\,\mathbf{i} + \ln(y-5)\,\mathbf{j} + \ln 2z\,\mathbf{k}.$
14. $\mathbf{a} = \left(3x^2-5y^3+z\right)\,\mathbf{i} + \left(x+3y^2-6z^3\right)\,\mathbf{j} +$
$+ \left(x-7y^3+3z^2\right)\,\mathbf{k}.$
15. $\mathbf{a} = \left(x^4-y^4\right)\,\mathbf{i} + \left(y^4-z^4\right)\,\mathbf{j} + \left(z^4-x^4\right)\,\mathbf{k}.$

Глава 7

Специальные виды векторных полей

Основные формулы и определения

Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется **потенциальным**, если вектор поля $\mathbf{a}$ является градиентом некоторой скалярной функции $u = u(x, y, z)$: $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$. В этом случае скалярную функцию u называют **потенциалом** векторного поля.

Необходимым и достаточным условием потенциальности дважды дифференцируемого в односвязной области поля $\mathbf{a}$ является равенство нулю ротора этого поля: $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$.

Свойства потенциального векторного поля:

1) Циркуляция вектора поля по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области непрерывности поля, равна нулю (при условии, что область в которой определено векторное поле односвязна).

2) В области непрерывности потенциала поля линейный интеграл от вектора поля, взятый между двумя точками поля, не зависит от пути интегрирования и равен разности значений потенциала поля в конце и начале пути интегрирования:

$$\int\limits_A^B \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \int\limits_A^B \operatorname{grad} u\, d\mathbf{r} = \int\limits_A^B du = u(B) - u(A).$$

3) Если векторное поле потенциально, то потенциал поля $u(P)$ в произвольной точке с координатами $P(x, y, z)$ может быть вычислен по формуле: $u(P) = \int\limits_A^P \mathbf{a}\, d\mathbf{r} + u(A)$, где начальная точка A имеет фиксированные координаты $A(x_0, y_0, z_0)$.

Векторное поле называется **центральным**, если вектор поля $\mathbf{a}$ определяется формулой вида: $\mathbf{a} = f(r)\,\mathbf{r}$, где $f(r)$ — скалярная функция, которая определена при $r > 0$, непрерывна и обладает непрерывной производной. Центральное поле всегда потенциально.

Если во всех точках некоторой односвязной области пространства дивергенция векторного поля равна нулю ($\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$), то поле $\mathbf{a}$ называется **соленоидальным** в этой области. **Векторным потенциалом** соленоидального поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ называется поле $\mathbf{b}$, удовлетворяющее в заданной области пространства условию: $\operatorname{rot}\mathbf{b} = \mathbf{a}$. Векторное поле $\mathbf{a}$ называется **лапласовым (или гармоническим)**, если оно одновременно и потенциальное и соленоидальное.

Теорема Стокса о расщеплении векторного поля Любое непрерывное векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, заданное во всем пространстве и исчезающее на бесконечности вместе со своими дивергенцией и ротором, может быть единственным образом (с точностью до векторной постоянной) представлено в виде суммы потенциального $\mathbf{a}_1(\mathbf{r})$ и соленоидального $\mathbf{a}_1(\mathbf{r})$ полей, т е. $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{r})$, где $\operatorname{rot}\mathbf{a}_1 = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{a}_2 = 0$:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\iiint\frac{\operatorname{div}\mathbf{a}}{r}dV + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\iiint\frac{\operatorname{rot}\mathbf{a}}{r}dV.$$

Формула дает выражение для восстановления поля по его вихрям и дивергенции, т. е. когда известны только функции: $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \Omega(\mathbf{r})$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = \Theta(\mathbf{r})$ и требуется определить поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$.

Практическое занятие

Задача 7.1. Показать, что заданное векторное поле $\mathbf{a} = 2xy\,\mathbf{i} + \left(x^2 - 2yz\right)\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ потенциально и найти его скалярный потенциал. Сделать проверку полученного результата.

Решение: Убедимся, что заданное поле потенциально, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Для этого компоненты вектора $\mathbf{a}$ должны удовлетворять условиям:

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

$\left(-y^2\right)'_y = \left(x^2 - 2yz\right)'_z = -2y$, $(2xy)'_z = \left(-y^2\right)'_x = 0$, $\left(x^2 - 2yz\right)'_x = (2xy)'_y = 2x$. Следовательно, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ и поле $\mathbf{a}$ — потенциально.

Так как в точке начала координат заданная векторная функция непрерывна, за путь интегрирования примем ломаную $OABP$, где $O\,(0;0;0)$; $A\,(X;0;0)$; $B\,(X;Y;0)$; $P\,(X;Y;Z)$. Тогда скалярный потенциал $u\,(X;Y;Z)$ вычисляем по формуле:

$$u\,(X;Y;Z) = \int\limits_{OABP} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} + C = \int\limits_O^A \mathbf{a}\,d\mathbf{r} + \int\limits_A^B \mathbf{a}\,d\mathbf{r} + \int\limits_B^P \mathbf{a}\,d\mathbf{r} + C$$

В силу свойства аддитивности мы представили наш интеграл в виде суммы трёх интегралов, каждый из которых вычисляется вдоль одного из звеньев ломаной. Найдём подынтегральное выражение $\mathbf{a}\,d\mathbf{r}$:

$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$, $\mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 2xy\,dx + \left(x^2 - 2yz\right)\,dy - y^2\,dz$.

Найдём интеграл на отрезке $[OA]$: здесь $y = 0$; $dy = 0$; $z = 0$; $dz = 0$; $0 \leqslant x \leqslant X$. Подставляя эти значения в подынтегральное выражение получим: $\int\limits_O^A \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_0^A 2X \cdot 0\,dx = 0$.

Аналогично находим интеграл на отрезке $[AB]$: здесь $x = X$; $dx = 0$; $0 \leqslant y \leqslant Y$; $dy \neq 0$; $z = 0$; $dz = 0$. Подставляя эти значения во второй интеграл получим:

$$\int\limits_A^B \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_0^Y \left(X^2 - 2y \cdot 0\right) dy = \int\limits_0^Y X^2\,dy = X^2 Y.$$

Наконец, на отрезке $[BP]$ имеем: $x = X$; $dx = 0$; $0 \leqslant z \leqslant Z$; $dz \neq 0$; $y = Y$; $dy = 0$. Тогда:

$$\int\limits_B^P \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = -\int\limits_0^Z Y^2\,dz = -Y^2 Z.$$

Таким образом, $u\,(X;Y;Z) = X^2 Y - Y^2 Z + C$. Возвращаясь к переменным x, y, z, получаем: $u\,(x;y;z) = x^2 y - y^2 z + const$.

Чтобы убедиться в правильности решения делаем проверку. Находим grad u.

Задача 7.2. Проверить, что заданное векторное поле $\mathbf{a} = 2y\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал, полагая: 1) $b_x = 0$, 2) $b_z = 0$. Сделать проверку полученного результата.

Решение: 1) Убедимся в том, что поле соленоидально, т.е. $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$: $\dfrac{\partial a_x}{\partial x} = (2y)'_x = 0$, $\dfrac{\partial a_y}{\partial y} = (-z)'_y = 0$, $\dfrac{\partial a_z}{\partial z} = (2x)'_z = 0$.
$\operatorname{div}\mathbf{a} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z} = 0$, т. е. поле $\mathbf{a}$ — соленоидальное.

Векторный потенциал будем искать в виде: $\mathbf{b} = b_y(x,y,z)\,\mathbf{j} + b_z(x,y,z)\,\mathbf{k}$, т. е. полагаем $b_x(x,y,z) = 0$. Тогда:
$$b_y = \int a_z dx,\ \ b_z = \int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int a_y dx + \frac{\partial}{\partial z}\int a_z dx + a_x\right)dy - \int a_y dx.$$

По условию задачи компоненты заданного векторного поля равны: $a_x = 2y$; $a_y = -z$; $a_z = 2x$. Тогда интегрируя получим: $b_y = \int 2x dx = x^2$,
$$b_z = \int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int(-z)dx + \frac{\partial}{\partial z}\int 2x dx + 2y\right)dy + \int z dx = y^2 + zx.$$

Таким образом: $\mathbf{b} = x^2\,\mathbf{j} + \left(xz + y^2\right)\mathbf{k}$.

Чтобы убедиться в правильности решения делаем проверку. Находим: $\operatorname{rot}\mathbf{b}$.
$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x^2 & xz + y^2 \end{vmatrix} = 2y\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k}.$$

Мы получили заданную векторную функцию. Отсюда следует, что вектор $\mathbf{b}$ является векторным потенциалом заданного векторного поля.

2) Пусть теперь $b_z = 0$, а векторный потенциал ищется в виде: $\mathbf{b} = b_x(x,y,z)\,\mathbf{i} + b_y(x,y,z)\,\mathbf{j}$. Тогда:
$$b_x = \int a_y dz,\ \ b_y = \int\left(\frac{\partial}{\partial x}\int a_x dz + \frac{\partial}{\partial y}\int a_z dz + a_z\right)dx - \int a_x dz.$$

Интегрируя получим: $b_x = \int (-z)dz = -\dfrac{z^2}{2}$,
$b_y = \int \left((2yz)'_x + (2xz)'_y + 2x\right) dx - \int 2ydz = x^2 - 2yz$. Отсюда следует: $\mathbf{b} = -\dfrac{z^2}{2}\,\mathbf{i} + \left(x^2 - 2yz\right)\mathbf{j}$. Делаем проверку:

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -z^2/2 & x^2 - 2yz & 0 \end{vmatrix} = 2y\,\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k} = \mathbf{a}.$$

В рассмотренном примере для одного и того же соленоидального поля $\mathbf{a}$ получены разные векторные потенциалы. Они отличаются друг от друга слагаемым равным градиенту, некоторого скалярного поля $f(M)$: $\operatorname{grad} f(M) = \mathbf{b_1}(M) - \mathbf{b_2}(M)$. Это слагаемое играет роль произвольной постоянной при действии на неё операции ротор.

Задача 7.3. Показать, что заданная скалярная функция u является гармонической и найти для неё векторное поле $\mathbf{a}$.

$$u = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Решение: Функция u называется гармонической, если $\Delta u = 0$, т. е. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Найдём соответствующие частные производные: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Отсюда: $\Delta u = -\dfrac{2}{x^2 + y^2} + \dfrac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$, т. е. заданная функция является гармонической. Векторным полем для скалярной функции является поле градиента этой функции. Тогда:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathbf{j} = -\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} - \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}.$$

Задача 7.4. Найти потенциал заданного центрального поля $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$. Вычислить градиент сферического поля $u = f(r)$:

$$f(r) = \frac{\ln r}{r}$$

Решение: Потенциал центрального поля будем вычислять по формуле: $\varphi = \int\limits_{r_0}^{r} f(r) r\, dr$.

$$\varphi = \int \frac{\ln r}{r} r\, dr = \int \ln r\, dr = \left| \begin{array}{ll} u = \ln r & du = \dfrac{dr}{r} \\ dv = dr & v = r \end{array} \right| = r\ln r - \int dr.$$

$$\varphi = r\,(\ln r - 1)\,.$$

Градиент сферического поля находится следующим образом:

$$\operatorname{grad} u = \frac{f'(r)}{r}\,\mathbf{r}.$$

Тогда: $\quad f'(r) = \left(\dfrac{\ln r}{r}\right)' = \dfrac{1-\ln r}{r^2}, \qquad \operatorname{grad} u = \dfrac{1-\ln r}{r^3}\,\mathbf{r}.$

Задача 7.5. Найти: 1) дивергенцию центрального поля $\mathbf{a}$ из предыдущей задачи; 2) Лапласиан сферического поля $f(r)$ из предыдущей задачи.

Решение:

1) $\operatorname{div}\mathbf{a} = \operatorname{div}(f(r)\mathbf{r}) = \nabla\,(f(r)\,\mathbf{r}) = \operatorname{grad} f(r)\cdot\,\mathbf{r} + f(r)\operatorname{div}\mathbf{r}$. Тогда: $\operatorname{div}\mathbf{a} = 3f(r) + \operatorname{grad} f(r)\cdot\mathbf{r}$, так как $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$. Подставляя выражения для $f(r)$ и $\operatorname{grad} f(r)$ из предыдущей задачи с учётом $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = r^2$ получим:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = 3\frac{\ln r}{r} + \frac{1-\ln r}{r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = \frac{1+2\ln r}{r}.$$

2) Лапласиан сферического поля найдём по формуле:

$$\Delta f(r) = \operatorname{div}\operatorname{grad} f(r).$$

$\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) = \nabla\left(\dfrac{1-\ln r}{r^3}\mathbf{r}\right) = \operatorname{grad}\left(\dfrac{1-\ln r}{r^3}\right) + 3\dfrac{1-\ln r}{r^3} =$
$= -\dfrac{1}{r^3}$. Пусть: $g(r) = \dfrac{1-\ln r}{r^3}$, отсюда: $g(r)' = \dfrac{3\ln r - 4}{r^4}$. Тогда:

$$\operatorname{grad} g(r) = \frac{g'(r)}{r}\mathbf{r} = \frac{3\ln r - 4}{r^5}\mathbf{r}.$$

Варианты контрольных работ

Задача 7.1. *Показать, что заданное векторное поле* **a** *потенциально и найти его потенциал. Сделать проверку полученного результата.*

1. $\mathbf{a} = 2\,x\,y\,\mathbf{i} + \left(x^2+1\right)\,\mathbf{j}$.
2. $\mathbf{a} = (y+1)^2\,\mathbf{i} + 2\,x\,(y+1)\,\mathbf{j}$.
3. $\mathbf{a} = (y+z)\,\mathbf{i} + (x+z)\,\mathbf{j} + (x+y)\,\mathbf{k}$.
4. $\mathbf{a} = (1+y\,z)\,\mathbf{i} + x\,z\,\mathbf{j} + x\,y\,\mathbf{k}$.
5. $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{x+y+z}$.
6. $\mathbf{a} = e^x \sin\,y\,\mathbf{i} + e^x\cos\,y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
7. $\mathbf{a} = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{x^2}\right)\,\mathbf{i} + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2}\right)\,\mathbf{j} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2}\right)\,\mathbf{k}$.
8. $\mathbf{a} = 2\,x\,y\,\mathbf{i} + \left(x^2 - 2\,y\,z\right)\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$.
9. $\mathbf{a} = 2\,x\,y\,z\,\mathbf{i} + x^2 z\,\mathbf{j} + x^2 y\,\mathbf{k}$.
10. $\mathbf{a} = \left(3\,x^2 y - y^3\right)\,\mathbf{i} + \left(x^3 - 3\,x\,y^2\right)\,\mathbf{j}$.
11. $\mathbf{a} = \dfrac{2}{\sqrt{y+z}}\,\mathbf{i} - \dfrac{x}{(y+z)^{3/2}}\,\mathbf{j} - \dfrac{x}{(y+z)^{3/2}}\,\mathbf{k}$.
12. $\mathbf{a} = (y\,z - x\,y)\,\mathbf{i} + \left(x\,z - \dfrac{x^2}{2} + y\,z^2\right)\,\mathbf{j} + y\,(x+y\,z)\,\mathbf{k}$.
13. $\mathbf{a} = y\,z\,(2\,x+y+z)\,\mathbf{i} + x\,z\,(x+2\,y+z)\,\mathbf{j} + x\,y\,(x+y+2\,z)\,\mathbf{k}$.
14. $\mathbf{a} = e^y\cos\,x\,\mathbf{i} + e^y\sin\,x\,\mathbf{j} + \cos\,z\,\mathbf{k}$.
15. $\mathbf{a} = \left(2\,x\,y + y^2 + 2\,z\right)\,\mathbf{i} + \left(x^2 + 2\,x\,y + 2\,z\right)\,\mathbf{j} + 2\,(x+y)\,\mathbf{k}$.

Задача 7.2. *Проверить, что заданное векторное поле* **a** *является соленоидальным и найти его векторный потенциал. Сделать проверку полученного результата.*

1. $\mathbf{a} = (y+z)\,\mathbf{i} + (x+z)\,\mathbf{j} + (x+y)\,\mathbf{k}$. Положить $b_x = 0$.
2. $\mathbf{a} = 2y\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k}$. Положить $b_x = 0$.
3. $\mathbf{a} = x\left(z^2 - y^2\right)\,\mathbf{i} + y\left(x^2 - z^2\right)\,\mathbf{j} + z\left(y^2 - x^2\right)\,\mathbf{k}$. Пусть $b_x = 0$.
4. $\mathbf{a} = (1+2xy)\,\mathbf{i} - zy^2\,\mathbf{j} + \left(yz^2 - 2yz + 1\right)\,\mathbf{k}$. Пусть $b_x = 0$.
5. $\mathbf{a} = 6\,y^2\,\mathbf{i} + 6\,z\,\mathbf{j} + 6\,x\mathbf{k}$. Положить $b_x = 0$.
6. $\mathbf{a} = \left(2yx^2 + xz\right)\,\mathbf{i} + \left(xy^2 - yz\right)\,\mathbf{j} - 6xyz\,\mathbf{k}$. Пусть $b_x = 0$.
7. $\mathbf{a} = \left(yx^2 + y^3\right)\,\mathbf{i} - x\left(x^2 - y^2\right)\,\mathbf{j}$. Положить $b_z = 0$.
8. $\mathbf{a} = xy^2\,\mathbf{i} + yx^2\,\mathbf{j} - z\left(x^2 + y^2\right)\,\mathbf{k}$. Положить $b_z = 0$.
9. $\mathbf{a} = ye^{x^2}\,\mathbf{i} + 2yz\,\mathbf{j} - \left(2xyze^{x^2} + z^2\right)\,\mathbf{k}$. Положить $b_z = 0$.
10. $\mathbf{a} = y^2\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$. Положить $b_z = 0$.
11. $\mathbf{a} = \left(z^2 - y\,x^3\right)\,\mathbf{i} + \left(x^2 - z\,y^2\right)\,\mathbf{j} + \left(3yzx^2 + yz^2\right)\mathbf{k}$. Положить $b_z = 0$.
12. $\mathbf{a} = 2xyz\,\mathbf{i} + (x - y + z)\,\mathbf{j} + \left(z - yz^2\right)\,\mathbf{k}$. Положить $b_z = 0$.
13. $\mathbf{a} = \dfrac{x}{y}\,\mathbf{i} + 2yz\,\mathbf{j} - \left(\dfrac{z}{y} + z^2\right)\,\mathbf{k}$. Положить $b_z = 0$.
14. $\mathbf{a} = 2yze^x\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} - z\left(yze^x + 2x\right)\,\mathbf{k}$. Положить $b_z = 0$.
15. $\mathbf{a} = 2yz\ln x\,\mathbf{i} - 2xz\ln y\,\mathbf{j} + z^2\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right)\,\mathbf{k}$. Пусть $b_z = 0$.

Задача 7.3. *Показать, что заданная скалярная функция* u *является гармонической и найти для неё векторное поле* $\mathbf{a}$. *Вычислить значение поля в точке* $M\,(1;1;1)$.

1. $u = 4\,x^2 - 2\,y^2 - 2\,z^2 + 6\,x\,y - 2\,x\,z + 8\,y\,z$.
2. $u = 2\,x^3 - 3\,x\,y^2 - 3\,x\,z^2 + y^3 - 6\,y\,x^2 + 3\,y\,z^2 + x\,y\,z$.
3. $u = 3\,z^3 - 9\,z\,x^2 + y^3 - 3\,y\,x^2 + 2\,x^3 - 6\,x\,z^2$.
4. $u = -3\,x^2 + 4\,y^2 - z^2 - 4\,x\,y + x\,z + 6\,y\,z$.
5. $u = 3\,x^3 - 3\,x\,y^2 - 6\,x\,z^2 - y^3 + 9\,y\,x^2 - 6\,y\,z^2 - 6\,x\,y\,z$.
6. $u = 3\,y^3 - 9\,y\,z^2 + z^3 - 6\,z\,x^2 + 3\,z\,y^2 + 6\,x\,y\,z$.
7. $u = 5\,x^2 - 7\,y^2 + 2\,z^2 + 2\,x\,y - 4\,x\,z - y\,z$.
8. $u = 4\,x^3 - 9\,x\,y^2 - 3\,x\,z^2 + 2\,y^3 + 3\,y\,x^2 - 6\,y\,z^2 + 6\,x\,y\,z$.
9. $u = 2\,x^3 - 6\,x\,y^2 - 3\,z^3 + 3\,z\,x^2 + 6\,z\,y^2 - 12\,x\,y\,z$.
10. $u = x^2 + 3\,y^2 - 4\,z^2 + x\,y + 8\,x\,z + 2\,y\,z$.
11. $u = 2\,x^3 - 9\,x\,y^2 + 3\,x\,z^2 - 2\,y^3 - 6\,y\,x^2 + 12\,y\,z^2$.
12. $u = 5\,y^3 - 12\,y\,x^2 - 3\,y\,z^2 - 2\,z^3 + 6\,z\,x^2 + 12\,x\,y\,z$.
13. $u = 2\,x^2 + y^2 - 3\,z^2 - 8\,x\,y + 10\,x\,z - 4\,y\,z$.

14. $u = x^3 - 6\,x\,y^2 + 3\,x\,z^2 + 3\,y^3 - 3\,y\,x^2 - 6\,y\,z^2$.
15. $u = x^3 - 3\,x\,z^2 + y^3 - 3\,y\,x^2 + z^3 - 3\,z\,x^2$.

Задача 7.4. *Найти потенциал заданного центрального поля* $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$. *Вычислить градиент сферического поля* $f(r)$*:*

1. $\mathbf{a} = \dfrac{e^r}{r}\mathbf{r}, \qquad f(r) = \dfrac{e^r}{r}.$
2. $\mathbf{a} = \dfrac{1 + \ln r}{r^2}\mathbf{r}, \qquad f(r) = \dfrac{1 + \ln r}{r^2}.$
3. $\mathbf{a} = e^r\mathbf{r}, \qquad f(r) = e^r.$
4. $\mathbf{a} = \ln r\mathbf{r}, \qquad f(r) = \ln r.$
5. $\mathbf{a} = \left(5\,r^3 - 2\right)\mathbf{r}, \qquad f(r) = \left(5\,r^3 - 2\right).$
6. $\mathbf{a} = \dfrac{(r+1)^2}{r}\mathbf{r}, \qquad f(r) = \dfrac{(r+1)^2}{r}.$
7. $\mathbf{a} = e^{r^2}\mathbf{r}, \qquad f(r) = e^{r^2}.$
8. $\mathbf{a} = \ln\left(1 + r^2\right)\mathbf{r}, \qquad f(r) = \ln\left(1 + r^2\right).$
9. $\mathbf{a} = \dfrac{1}{r}\mathbf{r}, \qquad f(r) = \dfrac{1}{r}.$
10. $\mathbf{a} = \dfrac{1}{r^2}\mathbf{r}, \qquad f(r) = \dfrac{1}{r^2}.$
11. $\mathbf{a} = r\mathbf{r}, \qquad f(r) = r.$
12. $\mathbf{a} = \dfrac{q}{r^3}\mathbf{r}, \qquad f(r) = \dfrac{q}{r^3}, \quad q = const.$
13. $\mathbf{a} = \left(4\,r^2 - 3\,r\right)\mathbf{r}, \qquad f(r) = 4\,r^2 - 3\,r.$
14. $\mathbf{a} = \left(4\,r^2 + 3\,r + 2\right)\mathbf{r}, \qquad f(r) = 4\,r^2 + 3\,r + 2.$
15. $\mathbf{a} = 3\,e^{-r}\mathbf{r}, \qquad f(r) = 3\,e^{-r}.$

Задача 7.5. *Найти:* 1) *дивергенцию центрального поля* $\mathbf{a}$ *из предыдущей задачи;* 2) *Лапласиан сферического поля* $f(r)$ *из предыдущей задачи.*

Глава 8

Тензорная алгебра

Основные формулы и определения

Практическое занятие

Задача 8.1. Найти тензорное произведение двух векторов $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ и $\mathbf{b} = (3, 2, 1)$. Показать, что свёртка полученного тензора равна скалярному произведению этих векторов.

Решение: Матрица, полученная в результате тензорного произведения двух векторов, определяет тензор второго ранга, который называется **диадой** и обозначается $\mathbf{ab}$:

$$\mathbf{ab} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{ba} = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что диада $\mathbf{ba}$ отлична от диады $\mathbf{ab}$ и является сопряжённым к ней тензором. Подстановка соответствующих компонент в формулу даёт искомое тензорное произведение:

$$\mathbf{ab} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{ba} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Свёртка полученного тензора равна сумме его диагональных элементов: $3 + 4 + 3 = 10$, что совпадает со скалярным произведением этих векторов: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Задача 8.2. Тензор второго ранга задан матрицей: (T_{ij}). Разложить этот тензор на симметричный (S_{ij}) и антисимметричный (A_{ij}). Показать, что свёртка их скалярного произведения $S_{ij}A_{ij} = 0$.

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение: Представим тензор в виде суммы $T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}$, где S_{ij} и A_{ij} — симметричный и антисимметричный тензоры второго ранга, соответственно. Координаты первого тензора находятся по формуле:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}).$$

Координаты второго тензора находятся по формуле:

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

Пользуясь этими формулами вычислим шесть координат, которыми определяется симметричный тензор S_{ij}: $S_{11} = \frac{1+1}{2} = 1$, $S_{22} = \frac{5+5}{2} = 5$, $S_{33} = \frac{9+9}{2} = 9$, $S_{12} = \frac{2+4}{2} = 3$, $S_{13} = \frac{3+7}{2} = 5$, $S_{23} = \frac{8+6}{2} = 7$. Таким образом: $S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Вычислим три координаты, которыми определяется антисимметричный тензор A_{ij}: $A_{21} = \frac{4-2}{2} = 1$, $A_{31} = \frac{7-3}{2} = 2$, $A_{32} = \frac{8-6}{2} = 1$. Таким образом: $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Скалярное произведение тензоров S_{mk} и A_{ij} есть тензор второго ранга. Свёртка полученного тензора (сумма диагональных элементов) есть скаляр, её можно искать тремя способами: 1) $S_{ik}A_{ij} = S_{1k}A_{1j} + S_{2k}A_{2j} + S_{3k}A_{3j} = L_{kj}$, $\mathrm{Sp}\,(L_{kj})$, 2) $S_{mj}A_{kj} = S_{m1}A_{k1} + S_{m2}A_{k2} + S_{m3}A_{k3} = L_{mk}$, $\mathrm{Sp}\,(L_{mk})$, 3) $S_{mk}A_{kj} = S_{m1}A_{1j} + S_{m2}A_{2j} + S_{m3}A_{3j} = L_{mj}$, $\mathrm{Sp}\,(L_{mj})$.

Выберем первый способ $S_{1k} = (1,3,5)$, $S_{2k} = (3,5,7)$, $S_{3k} = (5,7,9)$, $A_{1j} = (0,-1,-2)$, $A_{2j} = (1,0,-1)$, $A_{3j} = (2,1,0)$:

$$S_{1k}A_{1j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}, \quad S_{2k}A_{2j} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$S_{3k}A_{3j} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 14 & 7 & 0 \\ 18 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{kj} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -5 \\ 19 & 4 & -11 \\ 25 & 4 & -17 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\mathrm{Sp}\,(L_{kj}) = 13+4-17 = 0$. Непосредственное вычисление свёртки можно выполнить также по формуле: $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{k=1}^{3} S_{ik}A_{ik} = 0$.

Задача 8.3. Компоненты тензора второго ранга заданы матрицей из предыдущей задачи T_{ij}. Найти: 1) скаляр, полученный в результате применения к данному тензору операции свёртывания по паре индексов i, j; 2) вектор, полученный в результате тензорного умножения заданного тензора на вектор $\mathbf{x} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ с последующим свёртыванием по индексу вектора и по первому индексу тензора; 3) по индексу вектора и второму индексу тензора.

Решение: 1) Под операцией свёртывания понимают суммирование компонент тензора по двум каким-либо индексам. Эту операцию можно выполнять над тензорами ранг которых не менее двух. Здесь, полученный скаляр будет равен следу матрицы: $L_0 = \sum\limits_{i=1}^{3} L_{ii} = 1 + 5 + 9 = 15$.

2) Умножив тензор второго ранга T_{ij} на вектор $\mathbf{x}$ с координатами x_k получим тензор третьего ранга $L_{ijk} = T_{ij} \otimes x_k$.

Подвергнем полученный тензор операции свёртывания по первому и третьему индексам $i = k$. Получим:

$$L_j = \sum_{i=1}^{3} L_{iji} = L_{1j1} + L_{2j2} + L_{3j3},$$

а тогда координаты искомого вектора в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ будут числа:

$$L_1 = \sum_{i=1}^{3} L_{i1i} = L_{111} + L_{212} + L_{313} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 30,$$

$$L_2 = \sum_{i=1}^{3} L_{i2i} = L_{121} + L_{222} + L_{323} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 36,$$

$$L_3 = \sum_{i=1}^{3} L_{i3i} = L_{131} + L_{232} + L_{333} = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 42,$$

здесь первый сомножитель в сумме произведений — соответствующая компонента тензора T_{ij}, второй сомножитель — соответствующая компонента вектора $\mathbf{x}$. Отсюда следует, что искомый вектор запишется в виде: $\mathbf{a} = 30\,\mathbf{i} + 36\,\mathbf{j} + 42\,\mathbf{k}$.

3) Подвергнем полученный тензор операции свёртывания по второму и третьему индексам $j = k$. Получим:

$$L_i = \sum_{k=1}^{3} L_{ikk} = L_{i11} + L_{i22} + L_{i33},$$

а тогда координаты искомого вектора в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ будут числа:

$$L_1 = \sum_{k=1}^{3} L_{1kk} = L_{111} + L_{122} + L_{133} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14,$$

$$L_2 = \sum_{k=1}^{3} L_{2kk} = L_{211} + L_{222} + L_{233} = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 32,$$

$$L_3 = \sum_{k=1}^{3} L_{3kk} = L_{311} + L_{322} + L_{333} = 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 50,$$

здесь первый сомножитель в сумме произведений — соответствующая компонента тензора T_{ij}, второй сомножитель — соответствующая компонента вектора $\mathbf{x}$.

Отсюда следует, что искомый вектор запишется в виде: $\mathbf{b} = 14\,\mathbf{i} + 32\,\mathbf{j} + 50\,\mathbf{k}$.

Задача 8.4. Для тензора заданного матрицей T_{ij} найти его инварианты:

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение: Рассмотрим какой-либо тензор T и пусть: $T\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Если вектор $\mathbf{b}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$, т. е если вектор $\mathbf{a}$ после преобразования изменяет только свою величину, не изменяя своего направления, то направление вектора $\mathbf{a}$ называется **главным направлением тензора**. Если при этом $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, то величина λ называется **главным значением тензора**. Оно показывает во сколько раз тензор увеличивает векторы, направленные по главным осям тензора, направление таких векторов тензор не меняет.

Пусть тензор задан в некоторой системе координат своими компонентами t_{jk} и пусть $\mathbf{a}$ имеет главное направление, которому отвечает главное значение λ, тогда по определению: $T\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$, что равносильно системе из трёх линейных однородных алгебраических уравнений относительно a_1, a_2, a_3:

$$\begin{cases} t_{11}a_1 + t_{12}a_2 + t_{13}a_3 = \lambda a_1, \\ t_{21}a_1 + t_{22}a_2 + t_{23}a_3 = \lambda a_2, \\ t_{31}a_1 + t_{32}a_2 + t_{33}a_3 = \lambda a_3. \end{cases}$$

Эта система уравнений может иметь ненулевое решение, только если её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - \lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Развернём данный определитель, т. е. составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - \lambda^2 (t_{11} + t_{22} + t_{33}) +$$
$$+ \lambda \left(\begin{vmatrix} t_{22} & t_{32} \\ t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} \right) - \det |t_{jk}| = 0.$$

Корни этого уравнения λ_1, λ_2, λ_3 можно находить по теореме Виета, используя соотношения между корнями и коэффициентами уравнения:
$I_1 = t_{11} + t_{22} + t_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$,
$I_2 = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{32} \\ t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$,
$I_3 = \det |t_{jk}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Величины I_1, I_2, I_3 не изменяются при преобразовании координат и называются **инвариантами тензора**. Совершая подстановку соответствующих компонент тензора получим: $I_1 = 9$, $I_2 = 18$, $I_3 = 0$.

Задача 8.5. Найти главные значения и главные направления тензора из предыдущей задачи №4.

Решение: Согласно решению предыдущей задачи характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda = 0$.

Находим корни этого уравнения: $\lambda \left(\lambda^2 - 9\lambda + 18\right) = \lambda (\lambda - 3) (\lambda - 6) = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, которые являются главными значениями тензора. Главное направление, которое соответствует главному значению тензора $\lambda_1 = 0$, находим из системы:

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1) x_1 + 7x_2 + 3x_3 = x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + (3 - \lambda_1) x_2 + 8x_3 = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + (5 - \lambda_1) x_3 = 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Аналогично для $\lambda_2 = 3$ имеем:

$$\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Главное направление, соответствующее главному значению тензора $\lambda_3 = 6$, находим из системы:

$$\begin{cases} -5x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая системы линейных однородных алгебраических уравнений, находим векторы определяющие главные направления тензора: $\mathbf{a}_1 = \left(-\dfrac{47}{25}c,\ -\dfrac{4}{25}c,\ c\right)$, $\mathbf{a}_2 = (-2c,\ -c,\ c)$, $\mathbf{a}_3 = (-5c,\ -4c,\ -c)$, где c — свободная переменная, которая может принимать любое значение. Полагая $c = 1$, получаем базисное решение: $\mathbf{a}_1 = \left(-\dfrac{47}{25},\ -\dfrac{4}{25},\ 1\right)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,\ -1,\ 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-5,\ -4,\ -1)$.

Варианты контрольных работ

Задача 8.1. *Найти тензорное произведение двух векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$. *Показать, что свёртка полученного тензора равна скалярному произведению этих векторов.*

1. $\mathbf{a} = (1,\ -2,\ 3)$, $\mathbf{b} = (3,\ -2,\ 1)$.
2. $\mathbf{a} = (2,\ 3,\ -4)$, $\mathbf{b} = (7,\ 6,\ 3)$.
3. $\mathbf{a} = (1,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{b} = (7,\ 2,\ -3)$.
4. $\mathbf{a} = (-3,\ 8,\ 7)$, $\mathbf{b} = (1,\ -8,\ 9)$.
5. $\mathbf{a} = (-2,\ 5,\ 7)$, $\mathbf{b} = (4,\ 5,\ -3)$.
6. $\mathbf{a} = (1,\ -4,\ -1)$, $\mathbf{b} = (9,\ -6,\ 5)$.
7. $\mathbf{a} = (-9,\ -2,\ -5)$, $\mathbf{b} = (1,\ -2,\ 5)$.
8. $\mathbf{a} = (2,\ 1,\ 4)$, $\mathbf{b} = (8,\ 1,\ 6)$.
9. $\mathbf{a} = (-6,\ 4,\ 7)$, $\mathbf{b} = (5,\ 4,\ 3)$.
10. $\mathbf{a} = (1,\ 6,\ -6)$, $\mathbf{b} = (-8,\ 6,\ 3)$.
11. $\mathbf{a} = (2,\ 2,\ 5)$, $\mathbf{b} = (6,\ 2,\ 3)$.
12. $\mathbf{a} = (1,\ 9,\ 4)$, $\mathbf{b} = (5,\ 3,\ 2)$.
13. $\mathbf{a} = (-4,\ 3,\ 5)$, $\mathbf{b} = (3,\ -2,\ -1)$.
14. $\mathbf{a} = (1,\ 3,\ 5)$, $\mathbf{b} = (8,\ -1,\ 3)$.
15. $\mathbf{a} = (2,\ 6,\ 4)$, $\mathbf{b} = (8,\ 3,\ -6)$.

Задача 8.2. *Тензор второго ранга задан матрицей: (L_{ij}). Разложить этот тензор на симметричный S_{ij} и антисимметричный A_{ij}. Показать, что свёртка их скалярного произведения $S_{ij}A_{ij} = 0$.*

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. **11.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 8.3. *Компоненты тензора второго ранга заданы матрицей L_{ij}. Найти вектор, полученный:* 1) *в результате тензорного умножения заданного тензора на вектор* $\mathbf{x}$ *с последующим свёртыванием по индексу вектора и по первому индексу тензора;* 2) *по индексу вектора и второму индексу тензора.*

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$ **4.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$ **6.** $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$ **10.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$ **12.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Задача 8.4. *Для заданного тензора* T_{ij} *найти его инварианты.*

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 8 & 5 & 2 \\ -6 & 3 & 12 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} -9 & 4 & 1 \\ -7 & 8 & 2 \\ -8 & 12 & 3 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 9 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ -4 & 8 & -6 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \\ -2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 9 & 6 & 3 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$.

Задача 8.5. *Найти главные значения и главные направления тензора из предыдущей задачи № 4.*

Глава 9

Тензорная алгебра в криволинейных координатах

Основные формулы и определения

Практическое занятие

Задача 9.1. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ задана матрица аффинного ортогонального тензора второго ранга $L_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого тензора в прямоугольной системе координат $Ox'y'z'$, которая получается из системы $Oxyz$ в результате её поворота вокруг оси OZ на угол равный $\varphi = 60°$.

Решение: Пусть система $Oxyz$ определяется базисом $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$, а система $Ox'y'z'$ — базисом $\mathbf{e'_1}$, $\mathbf{e'_2}$, $\mathbf{e'_3}$. Найдём матрицу перехода от базиса $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ к базису $\mathbf{e'_1}$, $\mathbf{e'_2}$, $\mathbf{e'_3}$. Зная, что элементы матрицы есть числа: $\alpha_{ik} = \cos(\mathbf{e'_i e_k})$, получаем:

$$\alpha_{11} = \cos(\mathbf{e'_1 e_1}) = \cos 60° = \tfrac{1}{2}, \quad \alpha_{12} = \cos(\mathbf{e'_1 e_2}) = \cos 150° = -\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\alpha_{13} = \cos(\mathbf{e'_1 e_3}) = \cos 90° = 0, \quad \alpha_{21} = \cos(\mathbf{e'_2 e_1}) = \cos 30° = \tfrac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\alpha_{22} = \cos(\mathbf{e'_2 e_2}) = \cos 60° = \tfrac{1}{2}, \quad \alpha_{23} = \cos(\mathbf{e'_2 e_3}) = \cos 90° = 0,$$

$$\alpha_{31} = \cos(\mathbf{e'_3 e_1}) = \cos 90° = 0,$$
$$\alpha_{32} = \cos(\mathbf{e'_3 e_2}) = \cos 90° = 0,$$
$$\alpha_{33} = \cos(\mathbf{e'_3 e_3}) = \cos 0° = 1.$$

Таким образом, матрица перехода имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению новые координаты тензора II ранга вычисляются по формуле:

$$L'_{ij} = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \alpha_{im} \alpha_{jn} L_{mn}, \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Применительно к рассматриваемой задаче эта формула запишется так:

$$L'_{ij} = \alpha_{i1}\alpha_{j3} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \alpha_{i3}\alpha_{j1}.$$

Подставляя сюда значения для элементов матрицы перехода, получим:

$$L'_{11} = \alpha_{11}\alpha_{13} + \alpha_{12}\alpha_{12} + \alpha_{13}\alpha_{11} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

$$L'_{12} = \alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{21} = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}, \ldots$$

Следовательно, матрица тензора L_{ij} в базисе $\mathbf{e'_1}$, $\mathbf{e'_2}$, $\mathbf{e'_3}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}/4 & 1/2 \\ -\sqrt{3}/4 & 1/4 & \sqrt{3}/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.2. В декартовой системе координат даны компоненты тензора II ранга:

$$A^{ik} = A_i^{\cdot k} = A_{\cdot i}^{k} = A_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базисные векторы системы координат $K'(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ выражаются через базисные векторы декартовой системы координат $K(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$ по следующим формулам: $\mathbf{e_1} = \mathbf{e_x}; \mathbf{e_2} = \mathbf{e_x} + \mathbf{e_y}; \mathbf{e_3} = \mathbf{e_x} + \mathbf{e_y} + \mathbf{e_z}$. Найти фундаментальный тензор в новой системе координат.

Решение: Фундаментальный тензор в новой системе координат вычисляется по формуле: $g_{ik} = \mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_k}$, Тогда: $g_{11} = \mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_1} = \mathbf{e_x} \cdot \mathbf{e_x} = 1$, $g_{12} = \mathbf{e_1} \cdot \mathbf{e_2} = \mathbf{e_x}\,(\mathbf{e_x} + \mathbf{e_y}) = 1 + 0 = 1$, $g_{22} = \mathbf{e_2} \cdot \mathbf{e_2} = (\mathbf{e_x} + \mathbf{e_y})\,(\mathbf{e_x} + \mathbf{e_y}) = 2$, $g_{32} = \mathbf{e_3} \cdot \mathbf{e_2} = (\mathbf{e_x} + \mathbf{e_y} + \mathbf{e_z})\,(\mathbf{e_x} + \mathbf{e_y}) = 2 \ldots$

Отсюда, компоненты фундаментального тензора имеют вид:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Мы нашли ковариантные компоненты тензора. Его контравариантные компоненты задаются обратной матрицей к матрице g_{ik}:

$$g^{ik} = (g_{ik})^{-1} = \frac{G^{ik}}{\det\,(g_{ik})},$$

где G^{ik} — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу g_{ik} определителя $g = \det\,(g_{ik})$. Тогда:

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.3. Найти взаимный базис для базисных векторов $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$, заданных в предыдущей задаче №2. Построить по ним матрицу обратного перехода β из новой системы координат $K'(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ в старую декартовую $K(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$.

Решение: Векторы взаимного базиса связаны с векторами $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ соотношениями:

$$\left(\mathbf{e_i e^j}\right) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Разложим векторы взаимного базиса $\mathbf{e^j}$ по векторам заданного базиса: $\mathbf{e^j} = x_1^j\mathbf{e_1} + x_2^j\mathbf{e_2} + x_3^j\mathbf{e_3}$, где $j = 1, 2, 3$, а x_1^j, x_2^j, x_3^j — неизвестные компоненты векторов взаимного базиса. Умножим скалярно правую и левую части равенства на $\mathbf{e_i}$: $\left(\mathbf{e_i e^j}\right) = x_1^j\left(\mathbf{e_i e_1}\right) + x_2^j\left(\mathbf{e_i e_2}\right) + x_3^j\left(\mathbf{e_i e_3}\right) = \delta_i^j$.

Мы получили для каждого значения j неоднородную систему алгебраических уравнений. Найдём вектор $\mathbf{e^1}$. В этом случае $j = 1$ и система приобретает вид:

$$\begin{cases} x_1^1\left(\mathbf{e_1 e_1}\right) + x_2^1\left(\mathbf{e_1 e_2}\right) + x_3^1\left(\mathbf{e_1 e_3}\right) &= 1, \\ x_1^1\left(\mathbf{e_2 e_1}\right) + x_2^1\left(\mathbf{e_2 e_2}\right) + x_3^1\left(\mathbf{e_2 e_3}\right) &= 0, \\ x_1^1\left(\mathbf{e_3 e_1}\right) + x_2^1\left(\mathbf{e_3 e_2}\right) + x_3^1\left(\mathbf{e_3 e_3}\right) &= 0. \end{cases}$$

Так как определитель системы представляет собой определитель Грама, элементами которого являются скалярные произведения базисных (а значит линейно независимых) векторов, то он не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \left(\mathbf{e_1 e_1}\right) & \left(\mathbf{e_1 e_2}\right) & \left(\mathbf{e_1 e_3}\right) \\ \left(\mathbf{e_2 e_1}\right) & \left(\mathbf{e_2 e_2}\right) & \left(\mathbf{e_2 e_3}\right) \\ \left(\mathbf{e_3 e_1}\right) & \left(\mathbf{e_3 e_2}\right) & \left(\mathbf{e_3 e_3}\right) \end{vmatrix} \neq 0.$$

А это по теореме Крамера означает, что такая система имеет единственное решение. Заметим, что матрица системы уравнений представляет собой ковариантный фундаментальный тензор, вычисленный в предыдущей задаче. В этом случае удобно воспользоваться матричным способом решения системы. Тогда:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \left(g^{lm}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом: $\mathbf{e^1} = 2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} = 2\mathbf{e_x} - \mathbf{e_x} - \mathbf{e_y} = \mathbf{e_x} - \mathbf{e_y}$

Найдём вектор $\mathbf{e^2}$. В этом случае $j = 2$ и система приобретает вид:

$$\begin{cases} x_1^2\,(\mathbf{e_1e_1}) + x_2^2\,(\mathbf{e_1e_2}) + x_3^2\,(\mathbf{e_1e_3}) &= 0, \\ x_1^2\,(\mathbf{e_2e_1}) + x_2^2\,(\mathbf{e_2e_2}) + x_3^2\,(\mathbf{e_2e_3}) &= 1, \\ x_1^2\,(\mathbf{e_3e_1}) + x_2^2\,(\mathbf{e_3e_2}) + x_3^2\,(\mathbf{e_3e_3}) &= 0. \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом:

$\mathbf{e^2} = -\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} - \mathbf{e_3} = -\mathbf{e_x} + 2\mathbf{e_x} + 2\mathbf{e_y} - \mathbf{e_x} - \mathbf{e_y} - \mathbf{e_z} = \mathbf{e_y} - \mathbf{e_z}$.

Найдём вектор $\mathbf{e^3}$. В этом случае $j = 3$ и система приобретает вид:

$$\begin{cases} x_1^3\,(\mathbf{e_1e_1}) + x_2^3\,(\mathbf{e_1e_2}) + x_3^3\,(\mathbf{e_1e_3}) &= 0, \\ x_1^3\,(\mathbf{e_2e_1}) + x_2^3\,(\mathbf{e_2e_2}) + x_3^3\,(\mathbf{e_2e_3}) &= 0, \\ x_1^3\,(\mathbf{e_3e_1}) + x_2^3\,(\mathbf{e_3e_2}) + x_3^3\,(\mathbf{e_3e_3}) &= 1. \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом: $\mathbf{e^3} = -\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} = -\mathbf{e_x} - \mathbf{e_y} + \mathbf{e_x} + \mathbf{e_y} + \mathbf{e_z} = \mathbf{e_z}$.

Итак, векторы взаимного базиса имеют следующий вид:

$\mathbf{e^1} = 2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$; $\quad \mathbf{e^2} = -\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}$; $\quad \mathbf{e^3} = -\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$.

Естественно, они должны удовлетворять соотношениям: $\mathbf{e_i e^j} = \delta_i^j$, с помощью которых проверяется правильность решения. Сделаем частичную проверку, когда $i = j$. Тогда:

$\mathbf{e_1}\mathbf{e^1} = \mathbf{e_x}\left(\mathbf{e_x} - \mathbf{e_y}\right) = 1 - 0 = 1$, $\mathbf{e_2}\mathbf{e^2} = \left(\mathbf{e_x} + \mathbf{e_y}\right)\left(\mathbf{e_y} - \mathbf{e_z}\right) = 1$, $\mathbf{e_3}\mathbf{e^3} = \left(\mathbf{e_x} + \mathbf{e_y} + \mathbf{e_z}\right)\mathbf{e_z} = 0 + 0 + 1 = 1$, и т. д..

По найденным векторам легко строится матрица обратного перехода, элементами строк которой являются координаты соответствующих векторов:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её можно также найти из матрицы прямого перехода $\beta = \left(\alpha^T\right)^{-1}$, вычислив обратную матрицу к транспонированной.

Задача 9.4. Базисные векторы в новой системе координат определяются также как в задаче №2. Найти ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты тензора в новой системе координат, заданного в декартовой системе координат матрицей

$$A^{ik} = A_i^{\cdot k} = A_{\cdot i}^{k} = A_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Воспользуемся формулами связи при переходе из декартовой в новую систему координат. Тогда:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix},$$

где квадратная матрица (обозначим её α), есть матрица прямого преобразования при переходе от заданной в новую систему координат. Тогда коэффициенты прямого преобразования будут иметь вид:

$$\alpha^1_{1'} = 1; \quad \alpha^2_{1'} = 0; \quad \alpha^3_{1'} = 0;$$
$$\alpha^1_{2'} = 1; \quad \alpha^2_{2'} = 1; \quad \alpha^3_{2'} = 0;$$
$$\alpha^1_{3'} = 1; \quad \alpha^2_{3'} = 1; \quad \alpha^3_{3'} = 1.$$

Ковариантный тензор в новой системе координат можно теперь находить покомпонентно, пользуясь определением тензора:

$$A'_{ik} = \alpha^l_i \alpha^m_k A_{lm}, \tag{9.0.1}$$

где A_{lm} — компоненты заданного тензора. Тогда: $A'_{11} = \alpha^l_1 \alpha^m_1 A_{lm}$, где $l = 1; 2; 3$ и $m = 1; 2; 3$. $A'_{11} = \alpha^1_1 \alpha^1_1 A_{11} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$. $A'_{12} = \alpha^l_1 \alpha^m_2 A_{lm} = \alpha^1_1 \alpha^1_2 A_{11} + \alpha^1_1 \alpha^2_2 A_{12} = 2 + 1 = 3$, и т. д.. Аналогично находятся и остальные компоненты тензора. Можно поступить проще и сразу находить компоненты тензора в матричной форме, т. к. выражение (9.0.1) представляет собой компоненты матрицы, которая является результатом перемножения трёх матриц: α, (A_{lm}) и α^T — матрица транспонированная к матрице α, т. е. можно записать: $(A_{ik})' = \alpha\,(A_{lm})\,\alpha^T$. Тогда имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 19 \end{pmatrix}.$$

Контравариантные компоненты можно искать также пользуясь общим определением тензора: $A'^{ik} = \beta^l_i \beta^m_k A^{lm}$, где β^l_i — компоненты матрицы обратного перехода β, найденной в предыдущей задаче. Однако, и здесь можно сразу находить компоненты тензора в матричной форме по формуле: $\left(A^{ik}\right)' = \beta\,(A_{ik})\,\beta^T$. Тогда получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём в матричной форме смешанные компоненты тензора в новой системе координат. Пусть первый индекс будет ковариантный $A_{k}^{\cdot i}$. Тогда: $\left(A_{k}^{\cdot i}\right)' = \alpha \left(A_{k}^{\cdot i}\right) \beta^T$. Таким образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Остаётся найти компоненты смешанного тензора, у которого первый индекс контравариантный $A^{i}_{\cdot k}$. Тогда: $\left(A^{i}_{\cdot k}\right)' = \beta \left(A^{i}_{\cdot k}\right) \alpha^T$. Таким образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора в новой системе координат можно также искать по формулам, выражающим связь между смешанными ко- и контравариантными компонентами с помощью фундаментального тензора.

Задача 9.5. В системе координат с фундаментальным тензором g_{ik}, найденным в задаче №2, заданы два вектора своими контравариантными компонентами $a^i = (1, 2, 3)$, $b^j = (-1, 0, 2)$. Вычислить:
1) ковариантные компоненты векторов a_i и b_j,
2) скалярное произведение векторов $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,
3) векторное произведение векторов $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ в заданном и взаимном базисах.

Решение: 1) Согласно определению ковариантные компоненты векторов найдём с помощью фундаментального тензора g_{ik} по формулам: $a_i = g_{ij} a^i$ и $b_j = g_{ji} b^j$. Тогда имеем:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Итак, разложение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по векторам взаимного базиса имеет вид: $\mathbf{a} = 6\mathbf{e_1} + 11\mathbf{e_2} + 14\mathbf{e_3}$, $\mathbf{b} = \mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2} + 5\mathbf{e_3}$.

2) Скалярное произведение этих векторов можно находить двумя способами:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = g_{ij}a^i b^j = a_i b^j \qquad \text{или} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = g^{ij}a_i b_j = a^i b_j.$$

Применим первую формулу:

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 = 6\cdot(-1) + 11\cdot 0 + 14\cdot 2 = 22.$

Вторая формула даёт то же значение:

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 = 22.$

Сделаем проверку результата. Найдём компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в декартовой системе координат, учитывая, что согласно задаче № 2: $\mathbf{e_1} = \mathbf{e_x}$; $\mathbf{e_2} = \mathbf{e_x} + \mathbf{e_y}$; $\mathbf{e_3} = \mathbf{e_x} + \mathbf{e_y} + \mathbf{e_z}$:
$\mathbf{a} = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 3\mathbf{e_3} = 6\mathbf{e_x} + 5\mathbf{e_y} + 3\mathbf{e_z}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_3} = \mathbf{e_x} + 2\mathbf{e_y} + 2\mathbf{e_z}$.
Тогда: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b^z = 6\cdot 1 + 5\cdot 2 + 3\cdot 2 = 22.$

3) Векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ также можно искать двумя способами:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \sqrt{g}\,\varepsilon_{ijk}a^i b^j \mathbf{e^k} \qquad\qquad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}a_i b_j \mathbf{e_k}.$$

Применим вторую формулу. Определитель $g = \det(g_{ij}) = 1$ (согласно задаче № 2). Тогда $\sqrt{g} = 1$. Отсюда:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 6 & 11 & 14 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 13\mathbf{e_1} - 16\mathbf{e_2} + 7\mathbf{e_3}.$$

Сделаем проверку результата. В декартовой системе координат найденный вектор будет иметь следующие компоненты: $13\mathbf{e_x} - 16\mathbf{e_x} - 16\mathbf{e_y} + 7\mathbf{e_x} + 7\mathbf{e_y} + 7\mathbf{e_z} = 4\mathbf{e_x} - 9\mathbf{e_y} + 7\mathbf{e_z}$.

Вычислим теперь векторное произведение, считая, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы декартовыми координатами: $\mathbf{a} = (6, 5, 3)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 2)$. Тогда:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z} \\ 6 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\mathbf{e_x} - 9\mathbf{e_y} + 7\mathbf{e_z}.$$

Вычисления совпали. Также должны совпадать вычисления, выполненные по первой формуле:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e^1} & \mathbf{e^2} & \mathbf{e^3} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\mathbf{e^1} - 5\mathbf{e^2} + 2\mathbf{e^3}.$$

Для векторов взаимного базиса из задачи № 2 следует: $\mathbf{e^1} = \mathbf{e_x} - \mathbf{e_y}; \mathbf{e^2} = \mathbf{e_y} - \mathbf{e_z}; \mathbf{e^3} = \mathbf{e_z}$. Отсюда: $4\mathbf{e_x} - 4\mathbf{e_y} - 5\mathbf{e_y} + 5\mathbf{e_z} + 2\mathbf{e_z} = 4\mathbf{e_x} - 9\mathbf{e_y} + 7\mathbf{e_z}$.

Ответ: 1) $\mathbf{a} = (6, 11, 14)$, $\mathbf{b} = (1, 3, 5)$; 2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 22$; 3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (4, -9, 7)$, $a_i \times b_j = (13, -16, 7)$, $a^i \times b^j = (4, -5, 2)$.

Варианты контрольных работ

Задача 9.1. *В прямоугольной системе координат $Oxyz$ задана матрица аффинного ортогонального тензора второго ранга T_{ij}. Найти матрицу этого тензора в прямоугольной системе координат $Ox'y'z'$, которая получается из системы $Oxyz$ в результате её поворота вокруг заданной оси на угол φ.*

1. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, OZ, $\varphi = \dfrac{5\pi}{6}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, OX, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, OZ, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. **4.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, OZ, $\varphi = \dfrac{2\,\pi}{3}$.

5. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, OZ, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. **6.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, OX, $\varphi = \dfrac{2\,\pi}{3}$.

7. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, OY, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. **8.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, OX, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, OX, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. **10.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, OY, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

11. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $OX, \varphi = \dfrac{\pi}{6}$. **12.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $OX, \varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

13. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $OY, \varphi = \dfrac{\pi}{4}$. **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $OY, \varphi = \dfrac{2\,\pi}{3}$.

15. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, OZ, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Задача 9.2. *Базисные векторы системы координат*

$K'(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ выражаются через базисные векторы декартовой системы координат $K(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$ как показано ниже. Вычислить контравариантный и ковариантный фундаментальные тензоры в новой системе координат.

1. $\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e_2} = -2\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e_3} = \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z.$
2. $\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e_2} = \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_3} = 2\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z.$
3. $\mathbf{e_1} = 2\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_2} = -\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_3} = \mathbf{e}_x.$
4. $\mathbf{e_1} = 2\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 3\,\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_2} = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_3} = -\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y.$
5. $\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e_2} = 2\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_3} = -\mathbf{e}_y - 2\,\mathbf{e}_z.$
6. $\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_x + 2\,\mathbf{e}_y + 3\,\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_2} = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e_3} = \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z.$
7. $\mathbf{e_1} = 2\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e_2} = 5\,\mathbf{e}_x + 3\,\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_3} = \mathbf{e}_z.$
8. $\mathbf{e_1} = 2\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_2} = \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e_3} = -3\,\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z.$
9. $\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_2} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_3} = 3\,\mathbf{e}_x + 2\,\mathbf{e}_y.$
10. $\mathbf{e_1} = -\mathbf{e}_x - 3\,\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_2} = \mathbf{e}_x + 2\,\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_3} = 2\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 4\,\mathbf{e}_z.$
11. $\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_2} = 2\,\mathbf{e}_x + 3\,\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e_3} = -\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 4\,\mathbf{e}_z.$
12. $\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e_2} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e_3} = \mathbf{e}_x + 3\,\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z.$
13. $\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e_2} = 2\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e_3} = \mathbf{e}_x + 4\,\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z.$
14. $\mathbf{e_1} = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e_2} = 3\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e_3} = \mathbf{e}_x + 5\,\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z.$
15. $\mathbf{e_1} = -\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e_2} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e_3} = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z.$

Задача 9.3. *Найти взаимный базис для базисных векторов $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$, заданных в предыдущей задаче №2. Построить по ним матрицу обратного перехода β из новой системы координат $K'(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ в старую декартовую $K(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$.*

Задача 9.4. *Базисные векторы в новой системе координат определяются также как в задаче №2. Найти ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты тензора в новой системе координат, заданного в декартовой системе координат матрицей T.*

$$\mathbf{T1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{T2} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{T3} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 8 & 5 & 2 \\ -6 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{T4} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 9 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{T5} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & -5 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{T6} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{T7} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{T8} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{T9} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{T10} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{T11} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{T12} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{T13} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{T14} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{T15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.5. *В системе координат с фундаментальным тензором g_{ik}, найденным в задаче № 2, заданы два вектора своими контравариантными компонентами a^i, b^j. Вычислить: ковариантные компоненты вектора, скалярное произведение векторов, векторное произведение векторов в заданном и взаимном базисе.*

1. $\mathbf{a} = \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} + 3\,\mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e_1} + 4\,\mathbf{e_3}.$
2. $\mathbf{a} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}.$
3. $\mathbf{a} = 2\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e_1} + 3\,\mathbf{e_2} + 4\,\mathbf{e_3}.$
4. $\mathbf{a} = -\mathbf{e_1} - 3\,\mathbf{e_2} + 3\,\mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = 3\,\mathbf{e_2} + 2\,\mathbf{e_3}.$
5. $\mathbf{a} = \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} + 2\,\mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = -3\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - 2\,\mathbf{e_3}.$
6. $\mathbf{a} = 6\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} - 5\,\mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = -\mathbf{e_1} + 3\,\mathbf{e_2} + 4\,\mathbf{e_3}.$
7. $\mathbf{a} = 7\,\mathbf{e_1} - 3\,\mathbf{e_2} + 4\,\mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e_1} + 4\,\mathbf{e_3}.$
8. $\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} - 2\,\mathbf{e_2} + 3\,\mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + 2\,\mathbf{e_3}.$
9. $\mathbf{a} = -2\,\mathbf{e_1} + 3\,\mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_3}.$

10. $\mathbf{a} = -5\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} - 4\,\mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = 4\,\mathbf{e_1} - 2\,\mathbf{e_2} + 3\,\mathbf{e_3}.$

11. $\mathbf{a} = 2\,\mathbf{e_1} - \mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = -\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}.$

12. $\mathbf{a} = -5\,\mathbf{e_1} + 4\,\mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = -5\,\mathbf{e_2} + 2\,\mathbf{e_3}.$

13. $\mathbf{a} = 5\,\mathbf{e_1} - 2\,\mathbf{e_2}, \quad \mathbf{b} = -3\,\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}.$

14. $\mathbf{a} = 11\,\mathbf{e_1} - 4\,\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = -8\,\mathbf{e_1} + 4\,\mathbf{e_2} - 2\,\mathbf{e_3}.$

15. $\mathbf{a} = 2\,\mathbf{e_1} + 3\,\mathbf{e_3}, \quad \mathbf{b} = 6\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + 4\,\mathbf{e_3}.$

Ответы

Контрольная работа № 1

1.1.1. а) $3\sqrt{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma = 0$, б) $(-2;\ 1;\ 1)$, в) $OX:\ z = 1,\ x = 2 - 4y,\ x \in R$, $OY:\ z = 1,\ y = 3 - 2x,\ y \in R$, $OZ:\ x = -2,\ y = 1,\ z \in R$. **1.1.2.** а) $2\sqrt{2}$, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma = 0$, б) $(3 - y;\ y;\ 1)$, в) $OX:\ z = 1,\ x = 3 - y,\ x \in R$, $OY:\ z = 1,\ y = 3 - x,\ y \in R$, $OZ:\ x + y = 3,\ z \in R$. **1.1.3.** а) $2\sqrt{14}$, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma = -\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, б) $(2;\ 2;\ 3)$, в) $OX:\ z = 3,\ 2x + y = 6,\ x \in R$, $OY:\ z = 3,\ 3x - 2y = 2,\ y \in R$, $OZ:\ x = 2,\ y = 2,\ z \in R$. **1.1.4.** а) 26, $\cos\alpha = \dfrac{4}{13}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\gamma = \dfrac{12}{13}$, б) $(-1;\ 1;\ -1)$, в) $OX:\ z = -1,\ 2y + 3x = -1,\ x \in R$, $OY:\ z = -1,\ 4x + 3y = -1,\ y \in R$, $OZ:\ x = -1,\ y = 1,\ z \in R$. **1.1.5.** а) $2\sqrt{29}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos\beta = -\dfrac{4}{\sqrt{29}}$, $\cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$, б) $(1;\ 3;\ 2)$, в) $OX:\ z = 2,\ x = 2y - 5,\ x \in R$, $OY:\ z = 2,\ y = 4x - 1,\ y \in R$, $OZ:\ x = 1,\ y = 3,\ z \in R$. **1.1.6.** а) $6\sqrt{2}$, $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, б) $(0;\ 0;\ 1/2)$, в) $OX:\ z = 1/2,\ x = 4y,\ x \in R$, $OY:\ z = 1/2,\ x = y,\ y \in R$, $OZ:\ x = 0,\ y = 0,\ z \in R$. **1.1.7.** а) $2\sqrt{5}$, $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, б) $(1;\ -1;\ 2)$, в) $OX:\ z = 2,\ y = -1,\ x \in R$, $OY:\ z = 2,\ x = 1,\ y \in R$, $OZ:\ x = 1,\ y = -1,\ z \in R$. **1.1.8.** а) $\sqrt{22}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{22}}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{22}}$, $\cos\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{22}}$, б) $(-3;\ -3;\ -4)$, в) $OX:\ x \in R,\ y = x/3 - 2,\ z = 2x/3 - 2$, $OY:\ x = y/3 - 2,\ y \in R,\ z = 2y/3 - 2$, $OZ:\ x = z/2 - 1,\ y = z/2 - 1,\ z \in R$. **1.1.9.** а) 4, $\cos\alpha = -1$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0$, б) $(3;\ 1;\ 1)$, в) $OX:\ x \in R,\ y = 1,\ z = 1$, $OY:\ x = -3,\ 2z - y = 1,\ y \in R$, $OZ:\ x = 3,\ 5y - 2z = 3,\ z \in R$. **1.1.10.** а) 7, $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = -1$, б) $(1;\ 2;\ 3)$, в) $OX:\ z = 3,\ y = 2,\ x \in R$, $OY:\ x = 1,\ 6z - 5y = 8,\ y \in R$, $OZ:\ x = 1,\ 2y - z = 1,\ z \in R$. **1.1.11.** а) $4\sqrt{43}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{43}}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{43}}$, $\cos\gamma = -\dfrac{5}{\sqrt{43}}$, б) $(-1;\ 3;\ 1)$, в) $OX:\ z = 1,\ y = 3,\ x \in R$, $OY:\ x = -1,\ 5y - 4z = 11,\ y \in R$, $OZ:\ x =$

$= -1,\ 5z - 3y = -4,\ z \in R$. **1.1.12.** а) $\sqrt{46}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{46}}$, $\cos\beta = -\dfrac{6}{\sqrt{46}}$, $\cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{46}}$, б) (2; 4; 2), в) $OX:\ 7x - 4z = 6,\ y = 4,\ x \in R$, $OY:\ x = 2,\ z = 2,\ y \in R$, $OZ:\ 7z - 6x = 2,\ y = 4,\ z \in R$. **1.1.13.** а) $2\sqrt{102}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{102}}$, $\cos\beta = \dfrac{10}{\sqrt{102}}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{102}}$, б) (3; -1; 2), в) $OX:\ y = -1,\ x = 3z - 3,\ x \in R$, $OY:\ x = 3,\ z = 2,\ y \in R$, $OZ:\ x = z + 1,\ y = -1,\ z \in R$. **1.1.14.** а) $2\sqrt{34}$, $\cos\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\beta = -\dfrac{4}{\sqrt{34}}$, $\cos\gamma = -\dfrac{3}{\sqrt{34}}$, б) (4; 2; 1), в) $OX:\ y = 2,\ z = x/2 - 1,\ x \in R$, $OY:\ x = 1,\ z = 1,\ y \in R$, $OZ:\ x = 5 - z,\ y = 2,\ z \in R$. **1.1.15.** а) $3\sqrt{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{6}{\sqrt{461}}$, $\cos\beta = \dfrac{16}{\sqrt{461}}$, $\cos\gamma = -\dfrac{13}{\sqrt{461}}$, б) ($-2$; -3; 3), в) $OX:\ y = -3,\ z = 3x/2 + 6,\ x \in R$, $OY:\ x = -2,\ z = 3,\ y \in R$, $OZ:\ x = -3z/4 + 1/4,\ y = -3,\ z \in R$.

1.2.1. $-\dfrac{26}{\sqrt{2}}$. **1.2.2.** 10.4. **1.2.3.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **1.2.4.** $\dfrac{47}{\sqrt{41}}$. **1.2.5.** $-\dfrac{36}{\sqrt{11}}$. **1.2.6.** $\dfrac{9}{\sqrt{2}}$. **1.2.7.** $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$. **1.2.8.** $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$. **1.2.9.** $\dfrac{32}{3\sqrt{2}}$. **1.2.10.** $\dfrac{48}{\sqrt{3}}$. **1.2.11.** $-\dfrac{42}{\sqrt{14}}$. **1.2.12.** 32. **1.2.13.** $-\dfrac{10}{\sqrt{3}}$. **1.2.14.** $-\dfrac{8}{\sqrt{3}}$. **1.2.15.** 4.

1.3.1. да. **1.3.2.** да. **1.3.3.** да. **1.3.4.** да. **1.3.5.** нет. **1.3.6.** да. **1.3.7.** да. **1.3.8.** да. **1.3.9.** да. **1.3.10.** да. **1.3.11.** да. **1.3.12.** да. **1.3.13.** да. **1.3.14.** да. **1.3.15.** да.

1.4.1. $\varphi = \pi$. **1.4.2.** $\varphi = 0$. **1.4.3.** $\cos\varphi = \dfrac{7}{9}$. **1.4.4.** $\cos\varphi = -\dfrac{1}{6}$. **1.4.5.** $\varphi = \pi$. **1.4.6.** $\varphi = 0$. **1.4.7.** $\varphi = 0$. **1.4.8.** $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. **1.4.9.** $\varphi = 0$. **1.4.10.** $\varphi = 0$. **1.4.11.** $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. **1.4.12.** $\varphi = 0$. **1.4.13.** $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. **1.4.14.** $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. **1.4.15.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{33}$.

1.5.1. $\operatorname{grad} u = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. **1.5.2.** $\operatorname{grad} u = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. **1.5.3.** $\operatorname{grad} u = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \dfrac{\pi}{8}\,\mathbf{k}$. **1.5.4.** $\operatorname{grad} u = \mathbf{0}$. **1.5.5.** $\operatorname{grad} u = \mathbf{0}$. **1.5.6.** $\operatorname{grad} u = \dfrac{1}{2}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{2}\,\mathbf{k}$. **1.5.7.** $\operatorname{grad} u = \dfrac{1}{20}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{20}\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{20}\,\mathbf{k}$. **1.5.8.** $\operatorname{grad} u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k}$. **1.5.9.** $\operatorname{grad} u = -4\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$. **1.5.10.** $\operatorname{grad} u = -2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$. **1.5.11.** $\operatorname{grad} u = -2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$. **1.5.12.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathbf{i} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathbf{j} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k}$. **1.5.13.** $\operatorname{grad} u = \mathbf{0}$. **1.5.14.** $\operatorname{grad} u = -2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$. **1.5.15.** $\operatorname{grad} u = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Контрольная работа № 2

2.1.1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **2.1.2.** $2\sqrt{3}$. **2.1.3.** $\dfrac{22}{15}$. **2.1.4.** $\sqrt{3}$. **2.1.5.** -165. **2.1.6.** $-\dfrac{13}{60}$. **2.1.7.** $\dfrac{91}{90}$. **2.1.8.** $\sqrt{2}\,(2+\pi)$. **2.1.9.** $4+15\pi$. **2.1.10.** $\dfrac{80\pi^3}{3}$. **2.1.11.** $-\dfrac{3\pi}{\sqrt{2}}$. **2.1.12.** $\sqrt{3}$. **2.1.13.** $\dfrac{143}{8}$. **2.1.14.** $\dfrac{44}{5}$. **2.1.15.** $\dfrac{10\pi^2}{9}+\ln 32$.

2.2.1. $S_\triangle=24$, $2x+2y+z=8$, $I_S=160$. **2.2.2.** $S_\triangle=6$, $2x+2y+z=4$, $I_S=\dfrac{8}{5}$. **2.2.3.** $S_\triangle=3\sqrt{14}$, $3x+2y+z=6$, $I_S=2\sqrt{14}$. **2.2.4.** $S_\triangle=4\sqrt{21}$, $4x+2y+z=8$, $I_S=8\sqrt{21}$. **2.2.5.** $S_\triangle=6\sqrt{2}$, $4x+y+z=4$, $I_S=12\sqrt{2}$. **2.2.6.** $S_\triangle=\sqrt{21}$, $2x+4y+z=4$, $I_S=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **2.2.7.** $S_\triangle=4\sqrt{21}$, $2x+4y+z=8$, $I_S=8\sqrt{21}$. **2.2.8.** $S_\triangle=3\sqrt{14}$, $2x+3y+z=6$, $I_S=\sqrt{14}$. **2.2.9.** $S_\triangle=6\sqrt{26}$, $4x+3y+z=12$, $I_S=\sqrt{26}$. **2.2.10.** $S_\triangle=5\sqrt{30}$, $5x+2y+z=10$, $I_S=0$. **2.2.11.** $S_\triangle=6\sqrt{11}$, $3x+y+z=6$, $I_S=12\sqrt{11}$. **2.2.12.** $S_\triangle=4\sqrt{6}$, $x+2y+z=4$, $I_S=0$. **2.2.13.** $S_\triangle=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$, $5x+y+z=5$, $I_S=5\sqrt{3}$. **2.2.14.** $S_\triangle=\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$, $x+3y+z=3$, $I_S=\sqrt{11}$. **2.2.15.** $S_\triangle=\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$, $3x+y+z=3$, $I_S=0$.

2.3.1. $\dfrac{91}{60}$. **2.3.2.** $2\pi^2a^2h$. **2.3.3.** $\dfrac{1}{35}$. **2.3.4.** $-\pi a^2$. **2.3.5.** 1. **2.3.6.** $\dfrac{14}{3}-\dfrac{\pi}{2}$. **2.3.7.** $\dfrac{9\pi}{2}+6$. **2.3.8.** $-\dfrac{14}{15}$. **2.3.9.** $4a^2\pi^2$. **2.3.10.** -8. **2.3.11.** $\dfrac{3}{28}$. **2.3.12.** 51π. **2.3.13.** $3\pi^2+\dfrac{128}{3}\pi$. **2.3.14.** $\dfrac{256}{5}$. **2.3.15.** $\dfrac{11}{5}$.

2.4.1. $\dfrac{56}{3}$. **2.4.2.** 0. **2.4.3.** -40. **2.4.4.** -6π. **2.4.5.** -8. **2.4.6.** 0. **2.4.7.** -67. **2.4.8.** $\dfrac{56}{3}$. **2.4.9.** 0. **2.4.10.** 40. **2.4.11.** $-\dfrac{64}{5}$. **2.4.12.** -2. **2.4.13.** $-\dfrac{1}{3}$. **2.4.14.** -3. **2.4.15.** 0.

2.5.1. $\dfrac{5}{3}$, $2x+y+z=2$. **2.5.2.** $\dfrac{8}{3}$, $2x+2y+z=4$. **2.5.3.** 3, $3x+2y+z=6$. **2.5.4.** 0, $4x+2y+z=8$. **2.5.5.** $\dfrac{39}{4}$, $3x+y+z=3$. **2.5.6.** 8, $4x+y+z=4$. **2.5.7.** $\dfrac{155}{6}$, $5x+y+z=5$. **2.5.8.** $\dfrac{7}{2}$, $2x+4y+z=4$. **2.5.9.** $\dfrac{9}{2}$, $x+3y+z=3$. **2.5.10.** $\dfrac{64}{3}$, $2x+4y+z=8$. **2.5.11.** $\dfrac{63}{2}$, $3x+3y+z=9$. **2.5.12.** 51, $2x+3y+z=6$. **2.5.13.** 84, $4x+3y+z=12$. **2.5.14.** 100, $5x+2y+z=10$. **2.5.15.** 36, $3x+y+z=6$.

2.6.1. $\dfrac{5}{3}$. **2.6.2.** $\dfrac{8}{3}$. **2.6.3.** 3. **2.6.4.** 0. **2.6.5.** $\dfrac{39}{4}$. **2.6.6.** 8. **2.6.7.** 0. **2.6.8.** 0. **2.6.9.** $\dfrac{9}{2}$. **2.6.10.** $\dfrac{64}{3}$. **2.6.11.** 0. **2.6.12.** 48. **2.6.13.** 72. **2.6.14.** 100. **2.6.15.** 36.

Контрольная работа № 3

3.1.1. $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -y\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k}$. **3.1.2.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$. **3.1.3.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(y^2 - x^2\right)\mathbf{k}$. **3.1.4.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$. **3.1.5.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$. **3.1.6.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$. **3.1.7.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = xz\,\mathbf{i} - yz\,\mathbf{j} + \left(y^2 - x^2\right)\mathbf{k}$. **3.1.8.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 2yz\,\mathbf{i} - 2xz\,\mathbf{j} - \left(x^2 + y^2\right)\mathbf{k}$. **3.1.9.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = x\left(z^2 - y^2\right)\mathbf{i} + y\left(x^2 - z^2\right)\mathbf{j} + z\left(y^2 - x^2\right)\mathbf{k}$. **3.1.10.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$. **3.1.11.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 2yz\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + 2xy\,\mathbf{k}$. **3.1.12.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 3y^2z\,\mathbf{i} + 3z^2x\,\mathbf{j} + 3x^2y\,\mathbf{k}$. **3.1.13.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -2yz\,\mathbf{i} - 2xz\,\mathbf{j} - 2xy\,\mathbf{k}$. **3.1.14.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$. **3.1.15.** $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 2yz\,\mathbf{i} - 2xz\,\mathbf{j}$.

3.2.1. $\operatorname{div}\mathbf{a} = x + y + z$. **3.2.2.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = -\dfrac{2}{(x+y+z)^{5/3}}$. **3.2.3.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = 4xy + 2z$. **3.2.4.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = 6xy^2z + 2x^3z$. **3.2.5.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$. **3.2.6.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = 3x^2 + 3y^2 - 3z^2$. **3.2.7.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = 5xy$. **3.2.8.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = x^2 + y^2$. **3.2.9.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = 6xyz$. **3.2.10.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. **3.2.11.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = x^2 + y^2 + z^2$. **3.2.12.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = x^3 + y^3 + z^3$. **3.2.13.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = x^2 + y^2 + z^2$. **3.2.14.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$. **3.2.15.** $\operatorname{div}\mathbf{a} = 2\left(x^2 + y^2\right)$.

3.3.1. $(2, 2, 1)$. **3.3.2.** $(3, 6, 3)$. **3.3.3.** $\left(0, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. **3.5.4.** $\left(1, \dfrac{2}{3}, -2\right)$. **3.3.5.** $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$. **3.3.6.** $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. **3.3.7.** $(1, 2, 3)$. **3.3.8.** $(7, 2, -1)$. **3.3.9.** $\left(-\dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{9}\right)$. **3.3.10.** $\left(\dfrac{10}{3}, -\dfrac{1}{3}, -6\right)$. **3.3.11.** $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, 6\right)$. **3.3.12.** $\left(2, \dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$. **3.3.13.** $(2e, 2e, -2e)$. **3.3.14.** $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$. **3.3.15.** $\left(-\dfrac{e}{3}, \dfrac{4e}{3}, -\dfrac{2e}{3}\right)$.

3.4.1. $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -2\left(x^2y + y^2z + xz^2\right)$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = (-2(y+z),\ -2(x+z),\ -2(x+y))$. **3.4.2.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = xy\,(1+y) + z^2$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = (-y,\ -z,\ -x)$. **3.4.3.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = e^y$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = (1 - 2y - 2z,\ -1 - 2z,\ -1 - 2y)$. **3.4.4.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 2\,(y - z)\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = (\sin y + \sin z,\ \sin x + \sin z,\ \sin x + \sin y)$. **3.4.5.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 2\cos x \sin y$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = \left(0,\ \sin x - \dfrac{1}{\sqrt{1 - z^2}},\ \sin x + \sin y\right)$. **3.4.6.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 4e^x + 4z - \ln y$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = \left(-\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z},\ -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{z},\ 4 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$. **3.4.7.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = x^3\,(5 + 2z) + z^2\,(1 - 4z)$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = \left(-2z,\ -1 - 3x^2,\ 5 - 3x^2\right)$. **3.4.8.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = (y + z,\ x + z,\ x + y)$. **3.4.9.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 3\left(y^2 - z^2\right)\operatorname{tg} x$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = \left(0,\ 3\left(z^2 - x^2\right),\ 3\left(y^2 - x^2\right)\right)$. **3.4.10.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = e^{-y}\left(e^{-z} - e^{-x}\right)$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = \left(e^{-y} - 1,\ 0,\ e^{-y} - 1\right)$. **3.4.11.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = y^2\left(2xy - 5y^2 + 3z^2\right)$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = (2y + \sin z,\ 2x + \sin z,\ 0)$. **3.4.12.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = e^x + \left(e^x - e^y\right)(x - y)$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = (8,\ 11,\ 8)$. **3.4.13.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -\dfrac{(x - y)(x - z)}{xy}$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = (2,\ 2,\ 2)$. **3.4.14.** $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -x -$

$-\,x^2$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a},\mathbf{c}] = (-2-6y,\ -1-2x,\ -2x-6y)$. **3.4.15.** $\operatorname{div}[\mathbf{a},\mathbf{b}] = -x^2 - 2x - 5y - 9z - 16$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a},\mathbf{c}] = (1-6y-2z,\ 1-2x-2z,\ 1-2x-6y)$.

3.5.1. 1) $f(x,y,z) = \dfrac{z^3}{3}$, 2) $f(x,y,z) = 2xy + x - z$. **3.5.2.** 1) $f(x,y,z) = z\left(x^2 - z\right)$, 2) $f(x,y,z) = 2xyz + x - 2z$. **3.5.3.** 1) $f(x,y,z) = 0$, 2) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y+z} - x - 3z$. **3.5.4.** 1) $f(x,y,z) = \dfrac{z^2}{2}$, 2) $f(x,y,z) = 2xye^{y^2-z^2} + x - 4z$. **3.5.5.** 1) $f(x,y,z) = \dfrac{z^2}{2}$, 2) $f(x,y,z) = 3xy^2 + 2x - 5z$. **3.5.6.** 1) $f(x,y,z) = xy^2z$, 2) $f(x,y,z) = y + 10z$. **3.5.7.** 1) $f(x,y,z) = x^2y$, 2) $f(x,y,z) = 2xz + 2y + 2z$. **3.5.8.** 1) $f(x,y,z) = xy^2$, 2) $f(x,y,z) = ze^{-y} - 3y + 8z$. **3.5.9.** 1) $f(x,y,z) = -ye^z$, 2) $f(x,y,z) = 2xz + z + y$. **3.5.10.** 1) $f(x,y,z) = 0$, 2) $f(x,y,z) = 5y + 10z - z\sin x$. **3.5.11.** 1) $f(x,y,z) = x\,(y - z)$, 2) $f(x,y,z) = 3xyz^2 - 3x - y$. **3.5.12.** 1) $f(x,y,z) = x + \cos x - \sin x$, 2) $f(x,y,z) = xy + 2x + 4y$. **3.5.13.** 1) $f(x,y,z) = -xe^z$, 2) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{1+z^2} - x + y$. **3.5.14.** 1) $f(x,y,z) = 0$, 2) $f(x,y,z) = 2xz\ln y - 4x + 3y$. **3.5.15.** 1) $f(x,y,z) = 3x\sin y\sin z$, 2) $f(x,y,z) = x\,(1 - \sin z) + 3y$.

Контрольная работа № 4

4.1.1. $\operatorname{grad} u = z^2\operatorname{tg}\theta\mathbf{e}_\rho + \dfrac{z^2}{\cos^2\theta}\mathbf{e}_\varphi + 2z\rho\operatorname{tg}\theta\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.2.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{z}{\rho^2}\operatorname{ctg}\theta\mathbf{e}_\rho - \dfrac{z}{\rho^2\sin^2\theta}\mathbf{e}_\varphi + \dfrac{1}{\rho}\operatorname{ctg}\theta\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.3.** $\operatorname{grad} u = 4\rho\left(1 + \dfrac{\rho^2}{z^2}\right)\mathbf{e}_\rho + 2\left(z - \dfrac{\rho^4}{z^3}\right)\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.4.** $\operatorname{grad} u = \dfrac{\rho}{z\sqrt{\rho^2 - z^2}}\mathbf{e}_\rho - \dfrac{\rho^2}{z^2\sqrt{\rho^2 - z^2}}\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.5.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{4z^2\cos 2\theta}{\rho\sin^2 2\theta}\mathbf{e}_\varphi + \dfrac{4z}{\sin 2\theta}\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.6.** $\operatorname{grad} u = z\rho\,(3\rho + \sin 2\theta)\,\mathbf{e}_\rho + z\rho\cos 2\theta\mathbf{e}_\varphi + \dfrac{\rho^2}{2}\,(2\rho + \sin 2\theta)\,\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.7.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{z^2}{\rho^2}\mathbf{e}_\rho + 2z\rho\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.8.** $\operatorname{grad} u = \dfrac{z}{4}\sin^2 2\theta\mathbf{e}_\rho + \dfrac{z}{2}\sin 4\theta\mathbf{e}_\varphi + \dfrac{\rho}{4}\sin^2 2\theta\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.9.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{z}{\rho^2}\mathbf{e}_\rho - \dfrac{4\cos 2\theta}{\rho\sin^2 2\theta}\mathbf{e}_\varphi + \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.10.** $\operatorname{grad} u = \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dfrac{2\operatorname{ctg} 2\theta}{\rho}\mathbf{e}_\varphi + \dfrac{1}{z}\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.11.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{6z^3}{\rho^7}\cos\left(\dfrac{z^3}{\rho^6}\right)\mathbf{e}_\rho + \dfrac{3z^2}{\rho^6}\cos\left(\dfrac{z^3}{\rho^6}\right)\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.12.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{3\rho^2}{z^3}\sin\left(\dfrac{\rho^3}{z^3}\right)\mathbf{e}_\rho + \dfrac{3\rho^3}{z^4}\sin\left(\dfrac{\rho^3}{z^3}\right)\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.13.** $\operatorname{grad} u = ze^{z\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho e^{z\rho}\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.14.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{2z\cos 2\theta}{\rho\sin 2\theta}\mathbf{e}_\varphi + \ln\left(\dfrac{2}{\sin 2\theta}\right)\mathbf{e}_\mathbf{z}$. **4.1.15.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_\rho - \dfrac{2}{\rho}\operatorname{ctg} 2\theta\mathbf{e}_\varphi - \dfrac{1}{z}\mathbf{e}_\mathbf{z}$.

4.2.1. $\operatorname{grad} u = \dfrac{2}{r}\mathbf{e}_\mathbf{r}$. **4.2.2.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{3}{r}\sin\theta\cos^2\theta\mathbf{e}_\theta$. **4.2.3.** $\operatorname{grad} u =$

$= \dfrac{2r}{\cos^2\theta}\mathbf{e_r} + \dfrac{2r\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta}\mathbf{e}_\theta$. **4.2.4.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{\sin 2\theta\operatorname{tg}\varphi}{r}\mathbf{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta\cos^2\varphi}\mathbf{e}_\varphi$. **4.2.5.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{\operatorname{ctg}\varphi}{r^2}\mathbf{e_r} - \dfrac{1}{r^2\sin\theta\sin^2\varphi}\mathbf{e}_\varphi$. **4.2.6.** $\operatorname{grad} u = \dfrac{2\operatorname{ctg}\theta}{r}\mathbf{e}_\theta$. **4.2.7.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{2\operatorname{ctg}\theta}{r}\mathbf{e}_\theta$. **4.2.8.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{4\operatorname{ctg}^3\theta}{r\sin^2\theta}\mathbf{e}_\theta$. **4.2.9.** $\operatorname{grad} u = \dfrac{4}{r\sin 2\theta}\mathbf{e}_\theta$. **4.2.10.** $\operatorname{grad} u = \dfrac{4\sin^3\theta\cos\theta}{r}\mathbf{e}_\theta$. **4.2.11.** $\operatorname{grad} u = \dfrac{2\cos\theta}{\sin 2\varphi}\mathbf{e_r} - \dfrac{2\sin\theta}{\sin 2\varphi}\mathbf{e}_\theta - - \dfrac{4\operatorname{tg}\theta\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}\mathbf{e}_\varphi$. **4.2.12.** $\operatorname{grad} u = 2r\operatorname{ctg}^2\theta\mathbf{e_r} - \dfrac{2r\operatorname{ctg}\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{e}_\theta$. **4.2.13.** $\operatorname{grad} u = = \dfrac{2}{r}\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\mathbf{e}_\theta$. **4.2.14.** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{1+\cos^2\theta}{r\sin^3\theta}\mathbf{e}_\theta$. **4.2.15.** $\operatorname{grad} u = \dfrac{\operatorname{ctg}\varphi}{r}\mathbf{e}_\theta$.

4.3.1. $\mathbf{a} = \rho z(\mathbf{e}_\rho - \mathbf{e_z})$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = 2z - \rho$. **4.3.2.** $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\rho - \dfrac{z}{\rho}\mathbf{e_z}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = = 0$. **4.3.3.** $\mathbf{a} = \rho z\mathbf{e}_\rho + \rho\mathbf{e}_\varphi + z\operatorname{tg}\varphi\mathbf{e_z}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = 2z + \operatorname{tg}\theta$. **4.3.4.** $\mathbf{a} = = \dfrac{z}{\rho}\mathbf{e}_\rho + z^2\mathbf{e_z}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = 2z$, **4.3.5.** $\mathbf{a} = \rho^4\cos\varphi\mathbf{e}_\rho + z\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = = \dfrac{\left(5\rho^4 + z\right)\cos\theta}{\rho}$. **4.3.6.** $\mathbf{a} = \dfrac{1}{\rho^4\cos\varphi}\mathbf{e}_\rho - \dfrac{1}{\rho^4}\mathbf{e_z}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = -\dfrac{3}{\rho^5\cos\theta}$. **4.3.7.** $\mathbf{a} = \rho^2\mathbf{e}_\rho + \rho\mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{e_z}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = 3\rho + 1$. **4.3.8.** $\mathbf{a} = \rho^2\mathbf{e}_\rho + \rho z(\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e_z})$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = = 4\rho$. **4.3.9.** $\mathbf{a} = \dfrac{z}{\rho^2}(\mathbf{e}_\rho - \mathbf{e_z})$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = -\dfrac{\rho + z}{\rho^3}$. **4.3.10.** $\mathbf{a} = \dfrac{z}{\rho^2}\mathbf{e}_\rho + + \dfrac{\sin 2\varphi}{2\rho}\mathbf{e_z}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = -\dfrac{z}{\rho^3}$. **4.3.11.** $\mathbf{a} = \dfrac{z}{\rho^2\sin\varphi}\mathbf{e}_\rho + \dfrac{z}{\rho^2}\mathbf{e_z}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = \dfrac{1}{\rho^2} - - \dfrac{z}{\rho^3\sin\theta}$. **4.3.12.** $\mathbf{a} = \dfrac{z}{\rho}(\mathbf{e}_\rho - \mathbf{e_z})$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = -\dfrac{1}{\rho}$. **4.3.13.** $\mathbf{a} = \rho z\mathbf{e}_\rho - \rho\mathbf{e}_\varphi - - z\sin\varphi\mathbf{e_z}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = 2z - \sin\theta$. **4.3.14.** $\mathbf{a} = z\rho\mathbf{e}_\rho + \rho^4\mathbf{e_z}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = 2z$. **4.3.15.** $\mathbf{a} = \rho z(\sin 2\varphi\mathbf{e}_\rho + \cos 2\varphi\mathbf{e}_\varphi - \rho\mathbf{e_z})$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = -\rho^2$.

4.4.1. $\mathbf{a} = \sin\varphi\mathbf{e}_\theta$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$. **4.4.2.** $\mathbf{a} = -\cos 2\varphi\mathbf{e_r} + \sin 2\varphi\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = = \dfrac{2\cos^2\theta}{r}$. **4.4.3.** $\mathbf{a} = \dfrac{1}{r\sin\theta\sin\varphi}\mathbf{e_r}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = \dfrac{1}{r^2\sin\theta\sin\varphi}$. **4.4.4.** $\mathbf{a} = = \dfrac{1}{r^5}\mathbf{e_r}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = -\dfrac{3}{r^6}$. **4.4.5.** $\mathbf{a} = \dfrac{\sin\theta}{r}(\cos\theta\mathbf{e_r} - \sin\theta\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\varphi)$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = = -\dfrac{\sin 2\theta}{r^2}$. **4.4.6.** $\mathbf{a} = -\dfrac{\cos 2\varphi}{r^4}\mathbf{e_r} + \dfrac{\sin 2\varphi}{r^4}\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = \dfrac{2\left(5\cos^2\theta - 2\right)}{r^5}$. **4.4.7.** $\mathbf{a} = \dfrac{1}{r^2}\mathbf{e_r}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$. **4.4.8.** $\mathbf{a} = \dfrac{\cos\varphi\operatorname{tg}\theta}{r}\mathbf{e_r}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = \dfrac{\cos\varphi\operatorname{tg}\theta}{r^2}$. **4.4.9.** $\mathbf{a} = -\dfrac{\cos 2\varphi}{r^3}\mathbf{e_r} + \dfrac{\sin 2\varphi}{r^3}\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = \dfrac{8\cos^2\theta - 3}{r^4}$. **4.4.10.** $\mathbf{a} = = r\cos\varphi\mathbf{e_r} + r\mathbf{e}_\theta$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = 3\cos\varphi + \operatorname{ctg}\varphi$. **4.4.11.** $\mathbf{a} = \dfrac{\sin\varphi\operatorname{tg}\theta}{r}\mathbf{e}_\theta$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = = \dfrac{1}{r^2\cos^2\theta}$. **4.4.12.** $\mathbf{a} = r(\cos\varphi\mathbf{e}_\theta + \sin\theta\mathbf{e}_\varphi)$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = \sin\theta\operatorname{ctg}\varphi$. **4.4.13.** $\mathbf{a} = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{r^5}\mathbf{e_r}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = -\dfrac{3\operatorname{tg}\varphi}{r^6}$. **4.4.14.** $\mathbf{a} = \dfrac{\operatorname{ctg}\theta}{r^4}\mathbf{e_r}$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = -\dfrac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^5}$. **4.4.15.** $\mathbf{a} = \dfrac{r}{\operatorname{tg}\varphi}\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = -1$.

4.5.1. $\mathbf{a} = \rho z(\mathbf{e}_\rho - \mathbf{e_z})$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = (\rho + z)\mathbf{e}_\varphi$. **4.5.2.** $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\rho - \frac{z}{\rho}\mathbf{e_z}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\frac{z}{\rho^2}\mathbf{e}_\varphi$. **4.5.3.** $\mathbf{a} = \rho z\mathbf{e}_\rho + \sin\varphi\mathbf{e_z}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{\cos\varphi}{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\mathbf{e}_\varphi$. **4.5.4.** $\mathbf{a} = \frac{z}{\rho}\mathbf{e}_\rho + z^2\mathbf{e_z}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\varphi$. **4.5.5.** $\mathbf{a} = \rho\cos\varphi\mathbf{e}_\rho + \rho z\mathbf{e_z}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -z\mathbf{e}_\varphi + \sin\varphi\mathbf{e_z}$. **4.5.6.** $\mathbf{a} = \frac{1}{\rho^2}\mathbf{e}_\rho - \frac{z}{\rho^2}\mathbf{e_z}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\frac{2z}{\rho^3}\mathbf{e}_\varphi$. **4.5.7.** $\mathbf{a} = \rho(\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e_z})$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\mathbf{e}_\varphi + 2\mathbf{e_z}$. **4.5.8.** $\mathbf{a} = \frac{1}{\rho^2\cos\varphi}\mathbf{e}_\rho - \frac{1}{\rho^2}\mathbf{e_z}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\frac{2}{\rho^3}\mathbf{e}_\varphi - \frac{\sin\varphi}{r^3\cos^2\varphi}\mathbf{e_z}$. **4.5.9.** $\mathbf{a} = \rho z(\mathbf{e}_\rho - \rho\mathbf{e_z})$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \rho(2z+1)\mathbf{e}_\varphi$. **4.5.10.** $\mathbf{a} = \frac{z}{\rho^2}\mathbf{e}_\rho + \frac{\sin 2\varphi}{\rho}\mathbf{e_z}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{\cos 2\varphi}{\rho^2}\mathbf{e}_\rho + \frac{2+\sin 2\varphi}{2\rho^2}\mathbf{e}_\varphi$. **4.5.11.** $\mathbf{a} = \rho z\mathbf{e}_\rho + \rho\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi + z^2\mathbf{e_z}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \rho\mathbf{e}_\varphi + 2\sin\varphi\mathbf{e_z}$. **4.5.12.** $\mathbf{a} = \rho^2\mathbf{e}_\rho + \operatorname{tg}\varphi\mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{e_z}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\rho}\mathbf{e_z}$. **4.5.13.** $\mathbf{a} = \operatorname{tg}\varphi\mathbf{e}_\rho + \rho^2 z\mathbf{e_z}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -2\rho z\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho\sin^2\varphi}\mathbf{e_z}$. **4.5.14.** $\mathbf{a} = \rho^3\mathbf{e}_\rho + z\cos\varphi\mathbf{e_z}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\frac{z\sin\varphi}{\rho}\mathbf{e}_\rho$. **4.5.15.** $\mathbf{a} = \rho\mathbf{e}_\varphi + z^2\sin^2\varphi\mathbf{e_z}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{z^2\sin 2\varphi}{\rho}\mathbf{e}_\rho + 2\mathbf{e_z}$.

4.6.1. $\mathbf{a} = \sin\varphi\mathbf{e}_\theta$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{2\cos\theta}{r}\mathbf{e_r} - \frac{\sin\theta}{r}\mathbf{e}_\theta$. **4.6.2.** $\mathbf{a} = -\cos 2\varphi\mathbf{e_r} + \sin 2\varphi\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\frac{\sin 2\theta}{r}\mathbf{e}_\varphi$. **4.6.3.** $\mathbf{a} = \frac{1}{\rho\sin\varphi\sin\theta}\mathbf{e_r}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\frac{cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\varphi\sin^2\theta}\mathbf{e}_\varphi$. **4.6.4.** $\mathbf{a} = \frac{1}{r^5}\mathbf{e_r}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$. **4.6.5.** $\mathbf{a} = \frac{\sin 2\varphi}{2r}\mathbf{e_r} + \frac{\sin\varphi}{r}\mathbf{e}_\theta - \frac{\sin 2\varphi}{2r}\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{2\cos\theta}{r^2}\mathbf{e_r} - \frac{\cos 2\theta}{r^2}\mathbf{e}_\varphi$. **4.6.6.** $\mathbf{a} = \frac{\sin\varphi}{r}\mathbf{e_r}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\frac{\cos\varphi}{r^2}\mathbf{e}_\theta$. **4.6.7.** $\mathbf{a} = \frac{1}{r^2}\mathbf{e_r}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$. **4.6.8.** $\mathbf{a} = r^3\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 4r^2\mathbf{e}_\theta$. **4.6.9.** $\mathbf{a} = -\frac{\cos 2\varphi}{r^3}\mathbf{e_r} + \frac{\sin 2\varphi}{r^3}\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\frac{4\sin 2\theta}{r^4}\mathbf{e}_\varphi$. **4.6.10.** $\mathbf{a} = -\frac{\cos 2\varphi}{r^4}\mathbf{e_r} + \frac{\sin 2\varphi}{r^4}\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\frac{5\sin 2\theta}{r^5}\mathbf{e}_\varphi$. **4.6.11.** $\mathbf{a} = \frac{\cos^2\varphi}{r}\mathbf{e_r} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{\sin 2\varphi}{r^2}\mathbf{e}_\varphi$. **4.6.12.** $\mathbf{a} = \frac{1}{r^3}\mathbf{e_r} + r\operatorname{tg}\varphi\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 2\operatorname{tg}\varphi\mathbf{e}_\theta$. **4.6.13.** $\mathbf{a} = \sin\theta\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\frac{\cos\theta}{r\sin\varphi}\mathbf{e_r} + \frac{\sin\theta}{r}\mathbf{e}_\varphi$. **4.6.14.** $\mathbf{a} = r\mathbf{e_r} + \operatorname{tg}\theta\mathbf{e}_\theta$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{tg}\theta}{r}\mathbf{e_r} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{r}\mathbf{e}_\varphi$. **4.6.15.** $\mathbf{a} = r(\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\varphi)$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{ctg}\varphi\mathbf{e_r} + 2\mathbf{e}_\theta - 2\mathbf{e}_\varphi$.

Контрольная работа № 5

5.1.1. 24π. **5.1.2.** 32π. **5.1.3.** 6π. **5.1.4.** 9π. **5.1.5.** 54π. **5.1.6.** 6. **5.1.7.** $12\pi^2$. **5.1.8.** 12π. **5.1.9.** 9π. **5.1.10.** $\frac{21\pi^2}{4}$. **5.1.11.** 36π. **5.1.12.** 36π. **5.1.13.** 15π. **5.1.14.** 108π. **5.1.15.** 4π.

5.2.1. a^5. **5.2.2.** 360. **5.2.3.** 11. **5.2.4.** 120. **5.2.5.** 80. **5.2.6.** $\frac{abc}{2}(b+c)$. **5.2.7.** 176. **5.2.8.** 140. **5.2.9.** 80. **5.2.10.** -24. **5.2.11.** -24. **5.2.12.** 0. **5.2.13.** -24. **5.2.14.** -180. **5.2.15.** 0.

5.3.1. 144. **5.3.2.** 4π. **5.3.3.** 45. **5.3.4.** 6π. **5.3.5.** -16. **5.3.6.** 1. **5.3.7.** 27π. **5.3.8.** -16. **5.3.9.** 3π. **5.3.10.** 12. **5.3.11.** -24. **5.3.12.** 2π. **5.3.13.** -24. **5.3.14.** 4π. **5.3.15.** 3.

5.4.1. $\frac{16}{3}$. **5.4.2.** -15. **5.4.3.** $-\frac{9}{2}$. **5.4.4.** 36. **5.4.5.** 48. **5.4.6.** $\frac{16}{3}$. **5.4.7.** -18. **5.4.8.** $\frac{23}{3}$. **5.4.9.** -3. **5.4.10.** 10. **5.4.11.** 10. **5.4.12.** -3. **5.4.13.** 8. **5.4.14.** 14. **5.4.15.** 12.

5.5.1. -4π. **5.5.2.** $-\pi$. **5.5.3.** 9π. **5.5.4.** $-\pi$. **5.5.5.** 2π. **5.5.6.** 24π. **5.5.7.** -18π. **5.5.8.** $-\pi$. **5.5.9.** 3π. **5.5.10.** π. **5.5.11.** 5π. **5.5.12.** -8π. **5.5.13.** 32π. **5.5.14.** -16π. **5.5.15.** 32π.

Контрольная работа № 6

6.1.1. 1) $(2,2,2)$, 2) 0, 3) $(0,0,0)$. **6.1.2.** 1) $(0,0,0)$, 2) $\frac{2}{x^2+y^2+z^2}$, 3) $(0,0,0)$. **6.1.3.** 1) $(1,1,1)$, 2) 0, 3) $(1,1,1)$. **6.1.4.** 1) $(0,0,0)$, 2) 0, 3) $(0,0,0)$. **6.1.5.** 1) $(0,0,0)$, 2) 0, 3) $(0,0,0)$. **6.1.6.** 1) $(0,0,0)$, 2) 6, 3) $(0,0,0)$. **6.1.7.** 1) $(0,0,0)$, 2) -2, 3) $(0,0,0)$. **6.1.8.** 1) $(1,1,1)$, 2) $-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, 3) $(1,1,1)$. **6.1.9.** 1) $\left(-\frac{1}{x^2},-\frac{1}{y^2},-\frac{1}{z^2}\right)$, 2) $2\left(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right)$, 3) $\left(-\frac{2x}{y^3}-\frac{1}{x^2},-\frac{2y}{z^3}-\frac{1}{y^2},-\frac{2z}{x^3}-\frac{1}{z^2}\right)$. **6.1.10.** 1) $(0,0,6z)$, 2) 0, 3) $(-6y,-6x,0)$. **6.1.11.** 1) $\left(0,0,-\frac{1}{z^2}\right)$, 2) $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$, 3) $\left(\frac{1}{y^2},\frac{1}{x^2},0\right)$. **6.1.12.** 1) (e^x,e^y,e^z), 2) 0, 3) $(0,0,0)$. **6.1.13.** 1) $(0,0,0)$, 2) $3e^{x+y+z}$, 3) $(-2e^{z-y}, -2e^{x-z}, -2e^{y-x})$. **6.1.14.** 1) $(0,0,0)$, 2) $3e^{x-y+z}$, 3) $(-2e^{y-z},-2e^{z-x},-2e^{x-y})$. **6.1.15.** 1) $\left(-\frac{1}{x^2},-\frac{1}{y^2},-\frac{1}{z^2}\right)$, 2) 2, 3) $\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2x}{z^3},-\frac{2y}{x^3}-\frac{1}{y^2},-\frac{2z}{y^3}-\frac{1}{z^2}\right)$.

6.2.1. $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (-1,1,0)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 16$. **6.2.2.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (0,0,0)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 2+3\ln 3$. **6.2.3.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (-1,-1,-1)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 6$. **6.2.4.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (0,0,0)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 0$. **6.2.5.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (-3,-3,-3)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 9$. **6.2.6.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (-3,-3,-3)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 21$. **6.2.7.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (-1,-9,7)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = -7$. **6.2.8.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (0,0,0)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 3$. **6.2.9.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (1,1,1)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) =$

$= 9$. **6.2.10.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (0,0,0)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 6$. **6.2.11.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (0,0,0)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 0$. **6.2.12.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (0,0,0)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 12e$. **6.2.13.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (2e^3, 2e^3, 2e^3)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 3e^3$. **6.2.14.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (-4e, -2e, 0)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = e$. **6.2.15.** $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = (-3,-1,-2)$, $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = 10$.

6.3.1. $u = \rho z^2$, $\Delta u = \dfrac{2\rho^2 + z^2}{\rho}$. **6.3.2.** $u = \dfrac{z^2}{\rho}$, $\Delta u = \dfrac{2}{\rho} + \dfrac{z^2}{\rho^3}$. **6.3.3.** $u = \dfrac{z^2+\rho^2}{z}$, $\Delta u = \dfrac{2(2z^2+\rho^2)}{z^3}$. **6.3.4.** $u = \sqrt{\rho^2 - z^2}$, $\Delta u = -\dfrac{2z^2}{(\rho^2 - z^2)^{3/2}}$. **6.3.5.** $u = \left(1 + \rho^2 \sin^2\varphi\right) z \operatorname{ctg}\varphi$, $\Delta u = \dfrac{2z\cos\varphi}{\rho^2 \sin^3\varphi}$. **6.3.6.** $u = z\rho^2\,(1 + \sin\varphi\cos\varphi)$, $\Delta u = 4z$. **6.3.7.** $u = \rho\,(z + \rho\sin\varphi\cos\varphi)$, $\Delta u = \dfrac{z}{\rho}$. **6.3.8.** $u = \dfrac{z\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}$, $\Delta u = -\dfrac{3z\sin 2\varphi}{2\rho^3}$. **6.3.9.** $u = z\ln\left(\dfrac{2}{\sin 2\varphi}\right)$, $\Delta u = \dfrac{4z}{\rho^2\sin^2 2\varphi}$. **6.3.10.** $u = z\ln(\rho\sin\varphi\cos\varphi)$, $\Delta u = -\dfrac{4z}{\rho^2\sin^2 2\varphi}$. **6.3.11.** $u = \sin(z+\rho)$, $\Delta u = \dfrac{\cos(\rho+z) - 2\rho\sin(\rho+z)}{\rho}$. **6.3.12.** $u = \cos\left(z^2 - \rho^2\right)$, $\Delta u = -4\left(\rho^2 + z^2\right)\cos(\rho^2 - z^2) - 2\sin(\rho^2 - z^2)$. **6.3.13.** $u = e^{z\rho}$, $\Delta u = \dfrac{e^{z\rho}}{\rho}\left(\rho^3 + \rho z^2 + z\right)$. **6.3.14.** $u = \rho^2\left(z^2 + \sin 2\varphi\right)$, $\Delta u = 2\rho^2 + 4z^2$. **6.3.15.** $u = \dfrac{z}{\rho} + \sin\varphi + \cos\varphi$, $\Delta u = \dfrac{z}{\rho^3} - \dfrac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\rho^2}$.

6.4.1. $u = 2\ln r$, $\Delta u = \dfrac{2}{r^2}$. **6.4.2.** $u = \cos^3\theta$, $\Delta u = -\dfrac{6\cos\theta\cos 2\theta}{r^2}$. **6.4.3.** $u = \dfrac{r^2}{\cos^2\theta}$, $\Delta u = \dfrac{2(4+\cos 2\theta)}{\cos^4\theta}$. **6.4.4.** $u = \cos^2\theta$, $\Delta u = \dfrac{2(1 - 3\cos^2\theta)}{r^2}$. **6.4.5.** $u = \dfrac{\operatorname{ctg}\varphi}{r}$, $\Delta u = \dfrac{2\cos\varphi}{r^3\sin^2\theta\sin^3\varphi}$. **6.4.6.** $u = \ln\left(\sin^2\theta\right)$, $\Delta u = -\dfrac{2}{r^2}$. **6.4.7.** $u = \ln\left(\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)$, $\Delta u = \dfrac{2}{r^2}$. **6.4.8.** $u = \operatorname{ctg}^2\theta$, $\Delta u = \dfrac{2(1+\cos^2\theta)}{r^2\sin^4\theta}$. **6.4.9.** $u = \ln\operatorname{tg}\theta$, $\Delta u = \dfrac{1}{r^2\cos^2\theta}$. **6.4.10.** $u = e^r$, $\Delta u = \dfrac{(2+r)e^r}{r}$. **6.4.11.** $u = \sin r$, $\Delta u = \dfrac{2\cos r - r\sin r}{r}$. **6.4.12.** $u = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$, $\Delta u = \dfrac{2(1+\cos^2\theta)}{r^2\sin^4\theta}$. **6.4.13.** $u = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$, $\Delta u = \dfrac{2\cos\theta}{r^2} + \dfrac{2}{r^2\cos^3\theta}$. **6.4.14.** $u = \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$, $\Delta u = \dfrac{4\cos\theta}{r^2\sin^4\theta}$. **6.4.15.** $u = \sin^4\theta$, $\Delta u = \dfrac{4\sin^2\theta(5\cos^2\theta - 1)}{r^2}$.

6.5.1. $\mathbf{b} = -6\,\mathbf{k}$, $\Delta\mathbf{a} = 6z\,\mathbf{i} + (6x-2)\,\mathbf{j} + 6x\,\mathbf{k}$. **6.5.2.** $\mathbf{b} = \sin z\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - \cos y\,\mathbf{k}$, $\Delta\mathbf{a} = -\sin y\,\mathbf{i} - \cos z\,\mathbf{j} + 6x\,\mathbf{k}$. **6.5.3.** $\mathbf{b} = \dfrac{2}{z^3}\,\mathbf{i} + \dfrac{2}{y^3}\,\mathbf{k}$, $\Delta\mathbf{a} = -\dfrac{1}{y^2}\,\mathbf{i} - \dfrac{1}{z^2}\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$. **6.5.4.** $\mathbf{b} = e^z\,\mathbf{i} - 8e^{2x}\,\mathbf{j} + e^y\,\mathbf{k}$, $\Delta\mathbf{a} = e^y\,\mathbf{i} + e^z\,\mathbf{j} - 4e^{2x}\,\mathbf{k}$.

6.5.5. $\mathbf{b} = -\frac{3}{8}y^{-5/2}\,\mathbf{i} - \frac{3}{8}z^{-5/2}\,\mathbf{j} - \frac{3}{8}x^{-5/2}\,\mathbf{k}$, $\Delta\mathbf{a} = -\frac{1}{4}z^{-3/2}\,\mathbf{i} - \frac{1}{4}x^{-3/2}\,\mathbf{j} - \frac{1}{4}y^{-3/2}\mathbf{k}$. **6.5.6.** $\mathbf{b} = -\operatorname{ch} y\,\mathbf{i} - \operatorname{ch} z\,\mathbf{j} - \operatorname{ch} x\,\mathbf{k}$, $\Delta\mathbf{a} = \operatorname{sh} z\,\mathbf{i} + \operatorname{sh} x\,\mathbf{j} + \operatorname{sh} y\,\mathbf{k}$. **6.5.7** $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\Delta\mathbf{a} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathbf{i} - \frac{2y}{(1+y^2)^2}\,\mathbf{j} - \frac{2z}{(1+z^2)^2}\,\mathbf{k}$. **6.5.8.** $\mathbf{b} = (\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} z)\mathbf{j}$, $\Delta\mathbf{a} = \operatorname{ch} z\,\mathbf{i} + \operatorname{ch} y\,\mathbf{j} + \operatorname{ch} x\,\mathbf{k}$. **6.5.9.** $\mathbf{b} = (e^x - e^z)\,\mathbf{j}$, $\Delta\mathbf{a} = e^z\,\mathbf{i} - \left(\frac{1}{4}y^{-3/2} + \sin y\right)\mathbf{j} + e^x\,\mathbf{k}$. **6.5.10.** $\mathbf{b} = 6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$, $\Delta\mathbf{a} = 6y\,\mathbf{i} + 6z\,\mathbf{j} + 6x\,\mathbf{k}$. **6.5.11.** $\mathbf{b} = -6\,\mathbf{i} - 6\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}$, $\Delta\mathbf{a} = 6(x-y)\,\mathbf{i} + 6(y-z)\,\mathbf{j} + 6(z-x)\,\mathbf{k}$. **6.5.12.** $\mathbf{b} = \frac{2}{z^3}\,\mathbf{i} + \frac{2}{x^3}\,\mathbf{j}$, $\Delta\mathbf{a} = -\frac{1}{(x-2)^2}\,\mathbf{i} - \frac{1}{z^2}\,\mathbf{j} - \frac{1}{x^2}\,\mathbf{k}$. **6.5.13.** $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\Delta\mathbf{a} = -\frac{1}{x^2}\,\mathbf{i} - \frac{1}{(y-5)^2}\,\mathbf{j} - \frac{1}{z^2}\,\mathbf{k}$. **6.5.14.** $\mathbf{b} = 6\,\mathbf{i} - 30\,\mathbf{k}$, $\Delta\mathbf{a} = (6-30y)\,\mathbf{i} + (6-36z)\,\mathbf{j} + (6-42y)\,\mathbf{k}$. **6.5.15.** $\mathbf{b} = -24z\,\mathbf{i} - 24x\,\mathbf{j} - 24y\,\mathbf{k}$, $\Delta\mathbf{a} = 12(x^2-y^2)\,\mathbf{i} + 12(y^2-z^2)\,\mathbf{j} + 12(z^2-x^2)\,\mathbf{k}$.

Контрольная работа № 7

7.1.1. $x^2y + y + C$. **7.1.2.** $x\,(y+1)^2 + C$. **7.1.3.** $xy + yz + zx + C$. **7.1.4.** $x + xyz + C$. **7.1.5.** $\ln|x+y+z| + C$. **7.1.6.** $e^x \sin y + z + C$. **7.1.7.** $\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + C$. **7.1.8.** $x^2y - y^2z + C$. **7.1.9.** $x^2yz + C$. **7.1.10.** $x^3y - xy^3 + C$. **7.1.11.** $\frac{2x}{\sqrt{y+z}} + C$. **7.1.12.** $xyz - \frac{x^2y}{2} + \frac{y^2z^2}{2} + C$. **7.1.13.** $xyz\,(x+y+z) + C$. **7.1.14.** $e^y \sin x + \sin z + C$. **7.1.15.** $x^2y + y^2x + 2zy + 2zx + C$.

7.2.1. $\mathbf{b} = \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\mathbf{j} + \left(\frac{y^2}{2} + yz - \frac{x^2}{2} - xz\right)\mathbf{k}$. **7.2.2.** $\mathbf{b} = x^2\,\mathbf{j} + \left(xz + y^2\right)\mathbf{k}$. **7.2.3.** $\mathbf{b} = \left(xzy^2 - \frac{zx^3}{3}\right)\mathbf{j} + \left(xyz^2 - \frac{yx^3}{3}\right)\mathbf{k}$. **7.2.4.** $\mathbf{b} = \left(xyz^2 - 2xyz + x\right)\mathbf{j} + y\,(1 + xyz)\,\mathbf{k}$. **7.2.5.** $\mathbf{b} = 3x^2\,\mathbf{j} + \left(2y^3 - 6xz\right)\mathbf{k}$. **7.2.6.** $\mathbf{b} = -3x^2yz\,\mathbf{j} + \left(xyz - \frac{x^2y^2}{2}\right)\mathbf{k}$. **7.2.7.** $\mathbf{b} = xz\left(x^2 - y^2\right)\mathbf{i} - yz\left(x^2 + y^2\right)\mathbf{j}$. **7.2.8.** $\mathbf{b} = x^2yz\,\mathbf{i} - xy^2z\,\mathbf{j}$. **7.2.9.** $\mathbf{b} = -\left(xz^2 + yze^{x^2}\right)\mathbf{i} - 2xyz\,\mathbf{j}$. **7.2.10.** $\mathbf{b} = \left(\frac{z^3}{3} - yx^2\right)\mathbf{i} - y^2z\,\mathbf{j}$. **7.2.11.** $\mathbf{b} = \left(x^2z - \frac{y^2z^2}{2}\right)\mathbf{i} + \left(x^3yz - \frac{z^3}{3}\right)\mathbf{j}$. **7.2.12.** $\mathbf{b} = z\left(x - y + \frac{z}{2}\right)\mathbf{i} - xyz^2\,\mathbf{j}$. **7.2.13.** $\mathbf{b} = yz^2\,\mathbf{i} - \frac{xz}{y}\,\mathbf{j}$. **7.2.14.** $\mathbf{b} = 2xyz\,\mathbf{i} - yz^2e^x\,\mathbf{j}$. **7.2.15.** $\mathbf{b} = -xz^2\ln y\,\mathbf{i} - yz^2\ln x\,\mathbf{j}$.

7.3.1. $\operatorname{grad} u|_M = 12\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$. **7.3.2.** $\operatorname{grad} u|_M = -11\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. **7.3.3.** $\operatorname{grad} u|_M = -24\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{k}$. **7.3.4.** $\operatorname{grad} u|_M = -9\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$. **7.3.5.** $\operatorname{grad} u|_M = 12\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{j} - 30\,\mathbf{k}$. **7.3.6.** $\operatorname{grad} u|_M = -6\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j} - 12\,\mathbf{k}$. **7.3.7.** $\operatorname{grad} u|_M = 8\,\mathbf{i} - 13\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$. **7.3.8.** $\operatorname{grad} u|_M = 12\,\mathbf{i} - 9\,\mathbf{j} - 12\,\mathbf{k}$. **7.3.9.** $\operatorname{grad} u|_M = -6\,\mathbf{i} -$

$-\,12\,\mathbf{j}-4\,\mathbf{k}$. **7.3.10.** $\operatorname{grad}u|_M=11\,\mathbf{i}+9\,\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}$. **7.3.11.** $\operatorname{grad}u|_M=-12\,\mathbf{i}-\,18\,\mathbf{j}+30\,\mathbf{k}$. **7.3.12.** $\operatorname{grad}u|_M=12\,\mathbf{j}+6\,\mathbf{k}$. **7.3.13.** $\operatorname{grad}u|_M=6\,\mathbf{i}-10\,\mathbf{j}$. **7.3.14.** $\operatorname{grad}u|_M=-6\,\mathbf{i}-12\,\mathbf{j}-6\,\mathbf{k}$. **7.3.15.** $\operatorname{grad}u|_M=-12\,\mathbf{i}-6\,\mathbf{k}$.

7.4.1. $\varphi=e^r$, $\operatorname{grad}f(r)=\dfrac{e^r(r-1)}{r^3}\mathbf{r}$. **7.4.2.** $\varphi=\dfrac{1}{2}\ln^2 r+\ln r$, $\operatorname{grad}f(r)=\dfrac{1-2(\ln r+1)}{r^4}\mathbf{r}$. **7.4.3.** $\varphi=(r-1)e^r)$, $\operatorname{grad}f(r)=\dfrac{e^r}{r}\mathbf{r}$. **7.4.4.** $\varphi=\dfrac{r^2}{2}\left(\ln r-\dfrac{1}{2}\right)$, $\operatorname{grad}f(r)=\dfrac{1}{r^2}\mathbf{r}$. **7.4.5.** $\varphi=r^5-r^2$, $\operatorname{grad}f(r)=15r\mathbf{r}$. **7.4.6.** $\varphi=\dfrac{(r+1)^3}{3}$, $\operatorname{grad}f(r)=\dfrac{r^2-1}{r^3}\mathbf{r}$. **7.4.7.** $\varphi=\dfrac{1}{2}e^{r^2}$, $\operatorname{grad}f(r)=2e^{r^2}\mathbf{r}$. **7.4.8.** $\varphi=\dfrac{1+r^2}{2}\left(\ln(1-r^2)-1\right)$, $\operatorname{grad}f(r)=\dfrac{2}{1+r^2}\mathbf{r}$. **7.4.9.** $\varphi=r$, $\operatorname{grad}f(r)=-\dfrac{1}{r^3}\mathbf{r}$. **7.4.10.** $\varphi=\ln r$, $\operatorname{grad}f(r)=-\dfrac{2}{r^4}\mathbf{r}$. **7.4.11.** $\varphi=\dfrac{1}{3}r^3$, $\operatorname{grad}f(r)=\dfrac{1}{r}\mathbf{r}$. **7.4.12.** $\varphi=-\dfrac{q}{r}$, $\operatorname{grad}f(r)=-\dfrac{3q}{r^5}\mathbf{r}$. **7.4.13.** $\varphi=r^4-\,-r^3$, $\operatorname{grad}f(r)=\left(8-\dfrac{3}{r}\right)\mathbf{r}$. **7.4.14.** $\varphi=r^4+r^3+r^2$, $\operatorname{grad}f(r)=\left(8+\dfrac{3}{r}\right)\mathbf{r}$. **7.4.15.** $\varphi=-3(1+r)e^{-r}$, $\operatorname{grad}f(r)=-\dfrac{3e^{-r}}{r}\mathbf{r}$.

7.5.1. $\operatorname{div}\mathbf{a}=\dfrac{e^r(2+r)}{r}$, $\Delta f(r)=\dfrac{e^r}{r}$. **7.5.2.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=\dfrac{2+\ln r}{r^2}$, $\Delta f(r)=\dfrac{2\ln r-1}{r^4}$. **7.5.3.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=e^r\,(3+r)$, $\Delta f(r)=\dfrac{e^r(2+r)}{r}$. **7.5.4.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=1+3\ln r$, $\Delta f(r)=\dfrac{1}{r^2}$. **7.5.5.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=30r^3-6$, $\Delta f(r)=60r$. **7.5.6.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=\dfrac{2(1+r)(2r+1)}{r}$, $\Delta f(r)=\dfrac{2}{r}$. **7.5.7.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=e^{r^2}\left(3+2r^2\right)$, $\Delta f(r)=2e^{r^2}\left(3+2r^2\right)$. **7.5.8.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=3\ln\left(1+r^2\right)+\dfrac{2r^2}{1+r^2}$, $\Delta f(r)=\dfrac{2(3+r^2)}{(1+r^2)^2}$. **7.5.9.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=\dfrac{2}{r}$, $\Delta f(r)=0$. **7.5.10.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=\dfrac{1}{r^2}$, $\Delta f(r)=\dfrac{2}{r^4}$. **7.5.11.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=4r$, $\Delta f(r)=\dfrac{2}{r}$. **7.5.12.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$, $\Delta f(r)=\dfrac{6q}{r^5}$. **7.5.13.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=4r\,(5r-3)$, $\Delta f(r)=\dfrac{6(4r-1)}{r}$. **7.5.14.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=20r^2+12r+6$, $\Delta f(r)=\dfrac{6(1+4r)}{r}$. **7.5.15.** $\operatorname{div}\mathbf{a}=3e^{-r}\,(3-r)$, $\Delta f(r)=\dfrac{3e^{-r}(r-2)}{r}$.

Контрольная работа № 8

8.1.1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -2 \\ 9 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, 10. **8.1.2.** $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 \\ 21 & 18 & 9 \\ -28 & -24 & -12 \end{pmatrix}$, 20.
8.1.3. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 14 & 4 & -6 \\ -7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 14. **8.1.4.** $\begin{pmatrix} -3 & 24 & -27 \\ 8 & -64 & 72 \\ 7 & -56 & 63 \end{pmatrix}$, -4.
8.1.5. $\begin{pmatrix} -8 & -10 & 6 \\ 20 & 25 & -15 \\ 28 & 35 & -21 \end{pmatrix}$, -4. **8.1.6.** $\begin{pmatrix} 9 & -4 & 5 \\ -36 & 16 & -20 \\ -9 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, 20. **8.1.7.** $\begin{pmatrix} -9 & 18 & -45 \\ -2 & 4 & -10 \\ -5 & 10 & -25 \end{pmatrix}$, -30. **8.1.8.** $\begin{pmatrix} 16 & 2 & 12 \\ 8 & 1 & 6 \\ 32 & 4 & 24 \end{pmatrix}$, 41.
8.1.9. $\begin{pmatrix} -30 & -24 & -18 \\ 20 & 16 & 12 \\ 35 & 28 & 21 \end{pmatrix}$, 7. **8.1.10.** $\begin{pmatrix} -8 & 6 & 3 \\ -48 & 36 & 18 \\ 48 & -36 & -18 \end{pmatrix}$, 10.
8.1.11. $\begin{pmatrix} 12 & 4 & 6 \\ 12 & 4 & 6 \\ 30 & 10 & 15 \end{pmatrix}$, 31. **8.1.12.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 45 & 27 & 18 \\ 20 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, 40. **8.1.13.** $\begin{pmatrix} -12 & 8 & 4 \\ 9 & -6 & -3 \\ 15 & -10 & -5 \end{pmatrix}$, -23. **8.1.14.** $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 24 & -3 & 9 \\ 40 & -5 & 15 \end{pmatrix}$, 20. **8.1.15.** $\begin{pmatrix} 16 & 6 & -12 \\ 48 & 18 & -36 \\ 32 & 12 & -24 \end{pmatrix}$, 10.

8.2.1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3/2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **8.2.2.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5/2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 5/2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1/2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **8.2.3.** $\begin{pmatrix} 4 & 5/2 & 3 \\ 5/2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 2 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **8.2.4.** $\begin{pmatrix} 4 & 1/2 & 5/2 \\ 1/2 & 5 & 1 \\ 5/2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **8.2.5.** $\begin{pmatrix} 1 & 7/2 & 3/2 \\ 7/2 & 4 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 0 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$. **8.2.6.** $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 5/2 \\ 3 & 5/2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3/2 \\ 3 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$.
8.2.7. $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 5/2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5/2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5/2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **8.2.8.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7/2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 7/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **8.2.9.** $\begin{pmatrix} 3 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 3 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \\ 2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$.
8.2.10. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$. **8.2.11.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5/2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **8.2.12.** $\begin{pmatrix} 5 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 7/2 \\ 3/2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -3/2 & -1/2 \\ 3/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
8.2.13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **8.2.14.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1/2 \\ 4 & 2 & 5/2 \\ 1/2 & 5/2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1/2 \\ 2 & 0 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 0 \end{pmatrix}$. **8.2.15.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1/2 \\ 2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

8.3.1. 1) $(5,1,-5)$, 2) $(8,7,-2)$. **8.3.2.** 1) $(-7,25,16)$, 2) $(12,11,10)$. **8.3.3.** 1) $(-7,3,-12)$, 2) $(-1,6,0)$. **8.3.4.** 1) $(2,18,12)$, 2) $(3,15,17)$. **8.3.5.** 1) $(-14,-6,-3)$, 2) $(7,1,-3)$. **8.3.6.** 1) $(30,-1,16)$, 2) $(14,15,4)$. **8.3.7.** 1) $(-45,-4,12)$, 2) $(0,2,7)$. **8.3.8.** 1) $(4,-12,17)$, 2) $(9,0,16)$. **8.3.9.** 1) $(11,-3,-12)$, 2) $(0,1,5)$. **8.3.10.** 1) $(1,-3,-2)$, 2) $(1,0,4)$. **8.3.11.** 1) $(14,10,-7)$, 2) $(1,0,12)$. **8.3.12.** 1) $(10,-12,-7)$, 2) $(22,0,1)$. **8.3.13.** 1) $(-2,-8,-4)$, 2) $(4,0,-20)$. **8.3.14.** 1) $(18,-42,-8)$, 2) $(0,16,0)$. **8.3.15.** 1) $(-15,-1,-4)$, 2) $(1,0,1)$.

8.4.1. $I_1=-4,\ I_2=-5,\ I_3=0$. **8.4.2.** $I_1=10,\ I_2=21,\ I_3=0$. **8.4.3.** $I_1=-3,\ I_2=-40,\ I_3=0$. **8.4.4.** $I_1=3,\ I_2=-88,\ I_3=0$. **8.4.5.** $I_1==15,\ I_2=36,\ I_3=0$. **8.4.6.** $I_1=11,\ I_2=0,\ I_3=0$. **8.4.7.** $I_1=2,\ I_2==-63,\ I_3=0$. **8.4.8.** $I_1=8,\ I_2=-48,\ I_3=0$. **8.4.9.** $I_1=7,\ I_2=6,\ I_3=0$. **8.4.10.** $I_1=2,\ I_2=-63,\ I_3=0$. **8.4.11.** $I_1=-2,\ I_2=-48,\ I_3=0$. **8.4.12.** $I_1=2,\ I_2=-8,\ I_3=0$. **8.4.13.** $I_1=0,\ I_2=0,\ I_3=0$. **8.4.14.** $I_1=9,\ I_2=18,\ I_3=0$. **8.4.15.** $I_1=13,\ I_2=0,\ I_3=0$.

8.5.1. $\lambda_1=-5,\ \mathbf{a_1}=(1,-2,0)$; $\lambda_2=1,\ \mathbf{a_2}=(1,-2,-6)$; $\lambda_3==0,\ \mathbf{a_3}=(-1,1,2)$. **8.5.2.** $\lambda_1=3,\ \mathbf{a_1}=\left(-\frac{5}{4},1,-\frac{5}{2}\right)$; $\lambda_2=7,\ \mathbf{a_2}==(1,0,2)$; $\lambda_3=0,\ \mathbf{a_3}=(2,-1,1)$. **8.5.3.** $\lambda_1=5,\ \mathbf{a_1}=(-2,-5,1)$; $\lambda_2==-8,\ \mathbf{a_2}=\left(-\frac{43}{15},\frac{16}{15},1\right)$; $\lambda_3=0,\ \mathbf{a_3}=(3,0,1)$. **8.5.4.** $\lambda_1=11,\ \mathbf{a_1}==\left(1,\frac{15}{8},-\frac{1}{2}\right)$; $\lambda_2=-8,\ \mathbf{a_2}=(-2,1,1)$; $\lambda_3=0,\ \mathbf{a_3}=\left(1,-\frac{21}{2},\frac{43}{2}\right)$. **8.5.5.** $\lambda_1=3,\ \mathbf{a_1}=(1,-7,3)$; $\lambda_2=12,\ \mathbf{a_2}=(1,2,3)$; $\lambda_3=0,\ \mathbf{a_3}=(1,-2,1)$. **8.5.6.** $\lambda_1=11,\ \mathbf{a_1}=(2,1,1)$; $\lambda_2=\lambda_3=0,\ \mathbf{a_2}=\mathbf{a_3}=\left(1,-\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right)$. **8.5.7.** $\lambda_1==-7,\ \mathbf{a_1}=\left(\frac{7}{3},1,\frac{2}{3}\right)$; $\lambda_2=9,\ \mathbf{a_2}=\left(1,\frac{29}{9},\frac{46}{9}\right)$; $\lambda_3=0,\ \mathbf{a_3}=(0,1,-4)$.

8.5.8. $\lambda_1 = -4,\ \mathbf{a_1} = (2, 1, -2)\,;\ \lambda_2 = 12,\ \mathbf{a_2} = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right);\ \lambda_3 = 0,\ \mathbf{a_3} = (4, -4, 1)$. **8.5.9.** $\lambda_1 = 1,\ \mathbf{a_1} = (-1, 0, 1)\,;\ \lambda_2 = 6,\ \mathbf{a_2} = \left(1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right);\ \lambda_3 = 0,\ \mathbf{a}_3 = (-1, -1, 1)$. **8.5.10.** $\lambda_1 = -7,\ \mathbf{a_1} = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right);\ \lambda_2 = 9,\ \mathbf{a_2} = \left(1, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right);\ \lambda_3 = 0,\ \mathbf{a_3} = \left(-\frac{34}{23}, \frac{52}{23}, 1\right)$. **8.5.11.** $\lambda_1 = -8,\ \mathbf{a_1} = (1, 1, -2)\,;\ \lambda_2 = 6,\ \mathbf{a_2} = \left(1, -\frac{5}{2}, -2\right);\ \lambda_3 = 0,\ \mathbf{a_3} = (17, 1, -10)$. **8.5.12.** $\lambda_1 = -2,\ \mathbf{a_1} = (1, -1, 2)\,;\ \lambda_2 = 4,\ \mathbf{a_2} = (7, 1, -14)\,;\ \lambda_3 = 0,\ \mathbf{a_3} = (-1, 1, -3)$. **8.5.13.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = (1, 0, 2)$. **8.5.14.** $\lambda_1 = 3,\ \mathbf{a_1} = (-2, -1, 2)\,;\ \lambda_2 = 6,\ \mathbf{a_2} = \left(\frac{5}{4}, 1, -\frac{1}{4}\right);\ \lambda_3 = 0,\ \mathbf{a_3} = \left(\frac{47}{4}, 1, -\frac{25}{4}\right)$. **8.5.15.** $\lambda_1 = 13,\ \mathbf{a_1} = \left(\frac{7}{6}, 1, -\frac{7}{6}\right);\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \mathbf{a_2} = \mathbf{a_3} = (-1, 1, 1)$.

Контрольная работа № 9

9.1.1. $\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **9.1.2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

9.1.3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **9.1.4.** $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

9.1.5. $\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$. **9.1.6.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$.

9.1.7. $\begin{pmatrix} 3 - 4\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} + 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} + 4 & 0 & 1 + 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$. **9.1.8.** $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 & -3 \\ \sqrt{2} & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

9.1.9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **9.1.10.** $\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} & 0 & 1 + \sqrt{3} \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{3} - 3 & 0 & \sqrt{3} + 3 \end{pmatrix}$.

9.1.11. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. **9.1.12.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

9.1.13. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **9.1.14.** $\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 0 & -3 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 1 - \sqrt{3} & 0 & 3 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

9.1.15. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9.2.1. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9.2.2. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -3/2 & -1/2 \\ -3/2 & 5/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

9.2.3. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9.2.4. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 14 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & 19 & -9 \\ 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}$.

9.2.5. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 21 & -10 & -6 \\ -10 & 5 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

9.2.6. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ -2 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & 13 \end{pmatrix}$.

9.2.7. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 0 \\ 13 & 35 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 34 & -13 & 13 \\ -13 & 5 & -5 \\ 13 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

9.2.8. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 10 & -10 & 7 \\ -10 & 11 & -7 \\ 7 & -7 & 5 \end{pmatrix}$.

9.2.9. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 13 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 5 \\ -13 & 13 & -5 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

9.2.10. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & -14 \\ -7 & 5 & 10 \\ -14 & 10 & 21 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 7 & 14 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

9.2.11. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 13 & 10 \\ 3 & 10 & 18 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 134 & -60 & 11 \\ -60 & 27 & -5 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

9.2.12. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 11 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ -7 & 10 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

9.2.13. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 18 \end{pmatrix}$, $\qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 54 & -30 & 7 \\ -30 & 17 & -4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

9.2.14. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 8 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 206 & -73 & 14 \\ -73 & 26 & -5 \\ 14 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$

9.2.15. $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

9.3. 1. $\mathbf{e^1} = (9,5,2)$, $\mathbf{e^2} = (5,3,1)$, $\mathbf{e^3} = (2,1,1)$; $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\mathbf{e^1} = (3,-3/2,-1/2)$, $\mathbf{e^2} = (-3/2,5/4,1/4)$, $\mathbf{e^3} = (-1/2,1/4,1/4)$; $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **3.** $\mathbf{e^1} = (1,1,-1)$, $\mathbf{e^2} = (1,2,0)$, $\mathbf{e^3} = (-1,0,3)$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. **4.** $\mathbf{e^1} = (2,-6,3)$, $\mathbf{e^2} = (-6,19,-9)$, $\mathbf{e^3} = (3,-9,5)$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. **5.** $\mathbf{e^1} = (21,-10,6)$, $\mathbf{e^2} = (-10,5,3)$, $\mathbf{e^3} = (-6,3,2)$; $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **6.** $\mathbf{e^1} = (2,-2,-5)$, $\mathbf{e^2} = (-2,3,5)$, $\mathbf{e^3} = (-5,5,13)$; $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. **7.** $\mathbf{e^1} = (34,-13,13)$, $\mathbf{e^2} = (-13,5,-5)$, $\mathbf{e^3} = (13,-5,6)$; $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **8.** $\mathbf{e^1} = (10,-10,7)$, $\mathbf{e^2} = (-10,11,-7)$, $\mathbf{e^3} = (7,-7,5)$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **9.** $\mathbf{e^1} = (14,-13,5)$, $\mathbf{e^2} = (-13,13,-5)$, $\mathbf{e^3} = (5,-5,2)$; $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **10.** $\mathbf{e^1} = (5,7,0)$, $\mathbf{e^2} = (7,14,-2)$, $\mathbf{e^3} = (0,-2,1)$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **11.** $\mathbf{e^1} = (134,-60,11)$, $\mathbf{e^2} = (-60,27,-5)$, $\mathbf{e^3} =$
$= (11,-5,1)$; $\begin{pmatrix} 3 & 11 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **12.** $\mathbf{e^1} = (6,-7,2)$, $\mathbf{e^2} = (-7,10,-3)$, $\mathbf{e^3} =$
$= (2,-3,1)$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **13.** $\mathbf{e^1} = (54,-30,7)$, $\mathbf{e^2} = (-30,17,-4)$, $\mathbf{e^3} =$

$= (7,-4,1)$; $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **14.** $\mathbf{e^1} = (206,-73,14)$, $\mathbf{e^2} =$
$= (-73,26,-5)$, $\mathbf{e^3} = (14,-5,1)$; $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **15.** $\mathbf{e^1} = (6,3,2)$, $\mathbf{e^2} =$
$= (3,2,1)$, $\mathbf{e^3} = (2,1,1)$; $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9.4.1. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -6 \\ -8 & 12 & 5 \\ -7 & 5 & 13 \end{pmatrix}$, $T^{jk} = \begin{pmatrix} -16 & -9 & -5 \\ -8 & -4 & -3 \\ -10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$,
$T^j_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -12 & -7 & 4 \end{pmatrix}$, $T^{\cdot j}_k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

9.4.2. $T_{jk} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 10 \\ 6 & 20 & -10 \end{pmatrix}$, $T^{jk} = \begin{pmatrix} -7 & -3 & -2 \\ -2 & 17/4 & 11/4 \\ 0 & 11/4 & 1/4 \end{pmatrix}$,
$T^j_{\cdot k} = \begin{pmatrix} -12 & -13 & -19 \\ 5 & 13/2 & 29/2 \\ 3 & 11/2 & 3/2 \end{pmatrix}$, $T^{\cdot j}_k = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 1 \\ -11 & 11/2 & 7/2 \\ -7 & 27/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

9.4.3. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 24 & -16 & -2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $T^{jk} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 18 \\ -7 & -1 & 9 \end{pmatrix}$,
$T^j_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & -30 \\ -4 & 8 & 24 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$, $T^{\cdot j}_k = \begin{pmatrix} 23 & -10 & 8 \\ 24 & -8 & 14 \\ -21 & 10 & -4 \end{pmatrix}$.

9.4.4. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 138 & 17 & -58 \\ 28 & 6 & -6 \\ -44 & -1 & 28 \end{pmatrix}$, $T^{jk} = \begin{pmatrix} -6 & 13 & -7 \\ 20 & -39 & 21 \\ -8 & 16 & -2 \end{pmatrix}$,
$T^j_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 0 & 17 & -29 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 17 \end{pmatrix}$, $T^{\cdot j}_k = \begin{pmatrix} -24 & -5 & 4 \\ 100 & 21 & -18 \\ -58 & -8 & 20 \end{pmatrix}$.

9.4.5. $T_{jk} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -6 \\ 10 & 42 & -26 \\ -25 & -71 & 30 \end{pmatrix}$, $T^{jk} = \begin{pmatrix} 153 & -83 & -59 \\ -85 & 45 & 31 \\ -50 & 24 & 18 \end{pmatrix}$,
$T^j_{\cdot k} = \begin{pmatrix} -17 & 7 & 3 \\ -54 & 32 & 14 \\ 5 & -15 & -3 \end{pmatrix}$, $T^{\cdot j}_k = \begin{pmatrix} -13 & -15 & -46 \\ 5 & 7 & 20 \\ -2 & -10 & 18 \end{pmatrix}$.

9.4.6. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 148 & 20 & 50 \\ 34 & 1 & 13 \\ 50 & 8 & 16 \end{pmatrix}$, $T^{jk} = \begin{pmatrix} -10 & 8 & 22 \\ 11 & -8 & -18 \\ 27 & -18 & -56 \end{pmatrix}$,

$$T^{j}_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 10 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad T_{k}^{\cdot j} = \begin{pmatrix} -22 & -2 & -6 \\ 56 & 3 & 19 \\ 80 & 9 & 23 \end{pmatrix}.$$

9.4.7. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 21 & 69 & 14 \\ 75 & 227 & 30 \\ 17 & 41 & -4 \end{pmatrix}, \quad T^{jk} = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 44 \\ -7 & 4 & -16 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$

$$T^{j}_{\cdot k} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 12 \\ -11 & 10 & 20 \\ -7 & 4 & -8 \end{pmatrix}, \quad T_{k}^{\cdot j} = \begin{pmatrix} -40 & -72 & 34 \\ 17 & 33 & -12 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

9.4.8. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 41 & 16 & -33 \\ 7 & 3 & -6 \\ -50 & -19 & 40 \end{pmatrix}, \quad T^{jk} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$

$$T^{j}_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 19 & -3 & 10 \\ -2 & 5 & -2 \\ -30 & 11 & -17 \end{pmatrix}, \quad T_{k}^{\cdot j} = \begin{pmatrix} -10 & -3 & 10 \\ 17 & 6 & -16 \\ -12 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

9.4.9. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 20 & 34 \\ 10 & 45 & 83 \end{pmatrix}, \quad T^{jk} = \begin{pmatrix} -30 & 16 & -5 \\ 33 & -18 & 6 \\ -15 & 10 & -3 \end{pmatrix},$

$$T^{j}_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 12 & -2 \\ -30 & 40 & -9 \end{pmatrix}, \quad T_{k}^{\cdot j} = \begin{pmatrix} -14 & -7 & 15 \\ 15 & 9 & -12 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

9.4.10. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 59 & -44 & -99 \\ -40 & 30 & 68 \\ -89 & 66 & 149 \end{pmatrix}, \quad T^{jk} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 15 & 15 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix},$

$$T^{j}_{\cdot k} = \begin{pmatrix} -13 & -5 & -11 \\ 10 & 4 & 8 \\ 17 & 3 & 17 \end{pmatrix}, \quad T_{k}^{\cdot j} = \begin{pmatrix} 15 & -10 & -19 \\ 31 & -20 & -39 \\ -9 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

9.4.11. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 8 & 18 & 9 \\ 17 & 38 & 21 \\ 0 & 1 & 19 \end{pmatrix}, \quad T^{jk} = \begin{pmatrix} 93 & -34 & 12 \\ -22 & 7 & -4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix},$

$$T^{j}_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 91 & -39 & 7 \\ 229 & -99 & 18 \\ 149 & -68 & 14 \end{pmatrix}, \quad T_{k}^{\cdot j} = \begin{pmatrix} 52 & 143 & 155 \\ -21 & -59 & -68 \\ 3 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

9.4.12. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 7 & 9 & 20 \\ 15 & 25 & 57 \end{pmatrix}, \quad T^{jk} = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 5 \\ 12 & -7 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$$T^{j}_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 13 & -15 & 5 \\ 19 & -19 & 7 \\ 29 & -26 & 12 \end{pmatrix}, \quad T_{k}^{\cdot j} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 22 \\ 4 & -6 & -27 \\ 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

9.4.13. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 13 \\ 12 & 31 & 41 \\ 13 & 44 & 95 \end{pmatrix}, \quad T^{jk} = \begin{pmatrix} 233 & -136 & 40 \\ -133 & 79 & -23 \\ 34 & -20 & 6 \end{pmatrix},$

$T_{\cdot k}^{j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 47 & -22 & 10 \end{pmatrix}, \quad T_{k}^{\cdot j} = \begin{pmatrix} 1 & 26 & 137 \\ 2 & -9 & -73 \\ 0 & 4 & 22 \end{pmatrix}.$

9.4.14. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 12 \\ 11 & 39 & 54 \\ 13 & 59 & 122 \end{pmatrix}, \quad T^{jk} = \begin{pmatrix} -133 & 43 & 1 \\ 67 & -22 & 1 \\ -12 & 4 & 0 \end{pmatrix},$

$T_{\cdot k}^{j} = \begin{pmatrix} 56 & -19 & 4 \\ 175 & -59 & 13 \\ 79 & -25 & 9 \end{pmatrix}, \quad T_{k}^{\cdot j} = \begin{pmatrix} -3 & 39 & 238 \\ 2 & -11 & -82 \\ 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}.$

9.4.15. $T_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 9 & -10 \\ 3 & -9 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{jk} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 5 \\ 10 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix},$

$T_{\cdot k}^{j} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \\ -7 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad T_{k}^{\cdot j} = \begin{pmatrix} 9 & -9 & -4 \\ 4 & 0 & -7 \\ 4 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$

9.5.1. 1) $a_i = -7\mathbf{e_1}+10\mathbf{e_2}+7\mathbf{e_3}$, $b_j = -2\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+7\mathbf{e_3}$; 2) 21; 3) $a^i \times b^j = 8\mathbf{e^1} - \mathbf{e^2} - 2\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = 63\mathbf{e_1}+35\mathbf{e_2}+13\mathbf{e_3}$. **9.5.2.** 1) $a_i = 2\mathbf{e_1}+3\mathbf{e_2}-3\mathbf{e_3}$, $b_j = 5\mathbf{e_1}+4\mathbf{e_2}+14\mathbf{e_3}$; 2) 1; 3) $a^i \times b^j = 2\mathbf{e^1}-16\mathbf{e^2}+6\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = 27\mathbf{e_1}-43/2\mathbf{e_2}+-7/2\mathbf{e_3}$. **9.5.3.** 1) $a_i = 7\mathbf{e_1}-3\mathbf{e_2}+2\mathbf{e_3}$, $b_j = 5\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}+3\mathbf{e_3}$; 2) 6; 3) $a^i \times b^j = 7\mathbf{e^1}-9\mathbf{e^2}+5\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = -7\mathbf{e_1}-11\mathbf{e_2}+8\mathbf{e_3}$. **9.5.4.** 1) $a_i = -32\mathbf{e_1}-6\mathbf{e_2}+9\mathbf{e_3}$, $b_j = 3\mathbf{e_1}+3\mathbf{e_2}+4\mathbf{e_3}$; 2) 0; 3) $a^i \times b^j = -15\mathbf{e^1}+2\mathbf{e^2}-3\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = -51\mathbf{e_1}+155\mathbf{e_2}-78\mathbf{e_3}$. **9.5.5.** 1) $a_i = 5\mathbf{e_1} + 8\mathbf{e_2} + 4\mathbf{e_3}$, $b_j = -\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e_2} - 13\mathbf{e_3}$; 2) -15; 3) $a^i \times b^j = -6\mathbf{e^1} - 4\mathbf{e^2} + 7\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = -128\mathbf{e_1} + 61\mathbf{e_2} + 38\mathbf{e_3}$. **9.5.6.** 1) $a_i = 61\mathbf{e_1} + 8\mathbf{e_2}+20\mathbf{e_3}$, $b_j = 9\mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2}+3\mathbf{e_3}$; 2) 43; 3) $a^i \times b^j = 23\mathbf{e^1}-19\mathbf{e^2}+20\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = -16\mathbf{e_1}-3\mathbf{e_2}+50\mathbf{e_3}$. **9.5.7.** 1) $a_i = -4\mathbf{e_1}-10\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}$, $b_j = 5\mathbf{e_1}+17\mathbf{e_2} + 4\mathbf{e_3}$; 2) 0; 3) $a^i \times b^j = -12\mathbf{e^1} - 24\mathbf{e^2} + 3\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = -57\mathbf{e_1} + 21\mathbf{e_2} - 18\mathbf{e_3}$. **9.5.8.** 1) $a_i = 7\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2} - 5\mathbf{e_3}$, $b_j = -7\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 13\mathbf{e_3}$; 2) 0; 3) $a^i \times b^j = -7\mathbf{e^1} - 7\mathbf{e^2} + 7\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = 49\mathbf{e_1} - 56\mathbf{e_2} + 35\mathbf{e_3}$. **9.5.9.** 1) $a_i = \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3}$, $b_j = \mathbf{e_1} - 4\mathbf{e_2} - 13\mathbf{e_3}$; 2) -1; 3) $a^i \times b^j = -3\mathbf{e^1} - 3\mathbf{e^2} - 3\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = -18\mathbf{e_1} + 15\mathbf{e_2} - 6\mathbf{e_3}$. **9.5.10.** 1) $a_i = -8\mathbf{e_1} + 5\mathbf{e_2} + 6\mathbf{e_3}$, $b_j = 12\mathbf{e_1} - 8\mathbf{e_2} - 13\mathbf{e_3}$; 2) -24; 3) $a^i \times b^j = -2\mathbf{e^1} - \mathbf{e^2} + 2\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = -17\mathbf{e_1} - 32\mathbf{e_2} + 4\mathbf{e_3}$). **9.5.11.** 1) $a_i = \mathbf{e_1} - 12\mathbf{e_3}$, $b_j = 3\mathbf{e_1} + 8\mathbf{e_2} + 7\mathbf{e_3}$; 2) -1; 3) $a^i \times b^j = \mathbf{e^1} + \mathbf{e^2} + 2\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = 96\mathbf{e_1} - 43\mathbf{e_2} + 8\mathbf{e_3}$. **9.5.12.** 1) $a_i = -2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$, $b_j = -3\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3}$; 2) 5; 3) $a^i \times b^j = 3\mathbf{e^1} + 10\mathbf{e^2} + 25\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = -2\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$. **9.5.13.** 1) $a_i = \mathbf{e_1} - 7\mathbf{e_3}$, $b_j = -4\mathbf{e_1} - 5\mathbf{e_2} + 9\mathbf{e_3}$; 2) -10; 3) $a^i \times b^j = -2\mathbf{e^1} - 5\mathbf{e^2} - 11\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = -35\mathbf{e_1}+19\mathbf{e_2}-5\mathbf{e_3}$. **9.5.14.** 1) $a_i = \mathbf{e_2}+6\mathbf{e_3}$, $b_j = 2\mathbf{e_1} - 30\mathbf{e_3}$; 2) -8; 3) $a^i \times b^j = 4\mathbf{e^1} + 14\mathbf{e^2} + 12\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = -30\mathbf{e_1} + 12\mathbf{e_2} - 2\mathbf{e_3}$. **9.5.15.** 1) $a_i = -\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} + 7\mathbf{e_3}$, $b_j = 1\mathbf{e_1} - 4\mathbf{e_2} + 6\mathbf{e_3}$; 2) 20; 3) $a^i \times b^j = -3\mathbf{e^1} + 10\mathbf{e^2} + 2\mathbf{e^3}$, $a_i \times b_j = 16\mathbf{e_1} + 13\mathbf{e_2} + 6\mathbf{e_3}$.

Библиографический список

1. Ефимов А. В., Демидович Б. П. и др. Сборник задач по математике для втузов, Ч.2. Учебное пособие. Специальные разделы математического анализа. М.: Наука, 1995. – 368 с.
2. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Векторный анализ. Наука, 1978, 160 с. (2-ое изд. УРСС, 2002)
3. Ефимов А. В., Поспелов А. С. и др. Сборник задач по математике для втузов, Ч.1. Учебное пособие. М.: Физматлит, 2004, 288 с.
4. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре, 8-е изд. - М.: Лаборатория Базовых знаний, 2003, - 384 с.
5. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу: Учебное пособие для вузов. Ч. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Дрофа, 2001. - 725 с.
6. Гольдфайн И. А. Векторный анализ и теория поля: Учебное пособие для втузов. 2-е изд. - М.: Наука, 1968. - 128 с.
7. Борисенко А. И., Тарапов И. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления: Учебное пособие для вузов, 5-е изд. - М.: Высшая школа, 1978. - 216 с.
8. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. Учебное пособие. М.: Физматлит, 2002, 320 с.
9. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, Ч.2. Учебное пособие. М.: Физматлит, 2001, 464 с.
10. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые её приложения: Учебное пособие для студентов втузов. 5-е изд., стер. - М.: Альянс, 2009. - 392 с.
11. Соболева А. О., Фарков Ю. А. Криволинейные и поверхностные интегралы: Методическое пособие Университет «Дубна», 1999. - 88 с. - Лит.: с. 86. - ISBN 5-89847-012-3.
12. Кумпяк Д. Е. Векторный и тензорный анализ. Учебное пособие. Тверь: Тверской гос. университет, 2007, 158 с.
13. Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория применения в геометрии и в механике сплошных сред. М., «Наука», 1971. – 376 с.
14. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. - 456 с.
15. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление: Учебное пособие. М.: Наука, 1969. - 352 с.

Учебное издание

Пархоменко Александр Юрьевич

ПРАКТИКУМ
ПО ВЕКТОРНОМУ И ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие.

Редактор
Технический редактор
Компьютерная вёрстка
Корректор

Подписано в печать
Формат Компьютерная вёрстка Гарнитура
Печать на ризографе Уч. -изд.л. Усл.печ.л. 6.
Тираж 50 экз. Заказ №

Международный университет природы, общества и человека «Дубна»
141980, г. Дубна Московской обл., ул. Университетская, 19