

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ ХИМИИ

Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю) и методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модулю)

Тематика практических занятий

№ ПЗ	№ раздела (темы)	Виды и содержание практической работы
1.	Раздел 1.	Элементы комбинаторики, формула Ньютона. Комплексные числа.
2.	Раздел 2.	Производные основных элементарных функций. Простейшие интегралы.
3.	Раздел 3.	Дифференциальные уравнения первого порядка
4.	Раздел 3.	Дифференциальные однородные уравнения второго порядка
5.	Раздел 3.	Дифференциальные неоднородные уравнения второго порядка
6.	Раздел 4.	Нелинейные дифференциальные уравнения
7.	Раздел 5.	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений
8.	Раздел 6.	Численные методы
9.	Раздел 7.	Скалярное поле. Градиент. Оптимизация.

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

Методическая модель преподавания дисциплины основана на применении активных методов обучения. Принципами организации учебного процесса являются:

- выбор методов преподавания в зависимости от различных факторов, влияющих на организацию учебного процесса;
- объединение нескольких методов в единый преподавательский модуль в целях повышения эффективности процесса обучения;
- активное участие слушателей в учебном процессе;
- проведение практических занятий, определяющих приобретение навыков решения проблем;
- приведение примеров применения изучаемого теоретического материала к реальным практическим ситуациям.

Используемые методы преподавания: занятия с использованием мультимедиа презентаций; индивидуальные и групповые задания при проведении практических занятий. Индивидуальные задания подбираются студентам с учетом из работы над темами НИР.

Для более глубокого изучения предмета преподаватель предоставляет студентам информацию о возможности использования Интернет-ресурсов по разделам дисциплины. На первом вводном лекционном занятии при рассмотрении исторических сведений по математическим моделям, используемым в химии, и основным методам математики. Которые используются для решения возникающих задач.

Содержание практических занятий определяется календарным планом, который составляется преподавателем, проводящим занятия на основе рабочей программы дисциплины и утверждается заведующим кафедрой и проректором по учебной работе.

При наличии академических задолженностей по практическим занятиям, связанных с их пропусками преподаватель выдает задание студенту в виде дополнительных заданий по пропущенной теме занятия.

Для контроля знаний студентов по данной дисциплине необходимо проводить текущий и промежуточный контроль.

Текущий контроль выполняется в виде выполнения домашних заданий и контрольных работ, устного опроса на практических занятиях.

Контроль в конце курса проводится в виде зачета, на котором обсуждаются теоретические вопросы курса. Практическая часть зачитывается по результатам работ, выполненным в семестре.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Рабочей программой дисциплины «дифференциальные уравнения (приложения в химии)» предусмотрена самостоятельная работа студентов в объеме 12 часов для выполнения домашних заданий в виде задач по курсу.

Самостоятельная работа проводится с целью углубления знаний по дисциплине и предусматривает:

- изучение отдельных разделов тем дисциплины
- чтение студентами рекомендованной литературы и усвоение теоретического материала дисциплины;
- подготовку к практическим занятиям;
- работу с Интернет-источниками;
- подготовку к различным формам контроля.

Последовательность всех контрольных заданий изложена в календарном плане, который доводится до сведения каждого студента в начале семестра.

Планирование времени на самостоятельную работу, необходимого на изучение настоящей дисциплины, студентам лучше всего осуществлять на весь семестр, предусматривая при этом регулярное повторение пройденного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо регулярно дополнять сведениями из литературных источников, представленных в рабочей программе.

По каждой из тем для самостоятельного изучения, приведенных в рабочей программе дисциплины, следует сначала прочитать лекции и рекомендованную литературу. При необходимости составить краткий конспект основных положений, терминов, определений, требующих запоминания и являющихся основополагающими в этой теме и для освоения последующих разделов курса.

Для расширения знаний по дисциплине рекомендуется использовать Интернет-ресурсы: проводить поиск в различных системах и использовать материалы сайтов, рекомендованных преподавателем на лекционных занятиях.

Виды самостоятельной работы студентов – Решение задач по теме практических занятий

Самостоятельная работа студентов предполагается в виде:

- изучения отдельных вопросов тематического плана дисциплины;
- подготовка сообщений по проблемным задачам предмета с привлечением знаний, полученных из рекомендованной учебной литературы;
- подготовка к практическим занятиям;
- выполнение работы по индивидуальному заданию
- подготовка к зачету

При прохождении практикума студентам предлагается работать в малых группах: учебная группа разбивается на несколько небольших групп – по 2-3 человека.

Каждая группа выполняет задание. Процесс выполнения заданий осуществляется на основе обмена мнениями и выбора оптимального пути решения.

На собеседовании с преподавателем студент представляет оформленный отчет по данной работе и отвечает на вопросы преподавателя, связанные с методикой работы, результатами и выводами. По ряду работ предусматривается применение метода «защиты».

- **Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.**

Промежуточная аттестация

Перечень вопросов, выносимых на зачет.

1. Формула перестановки.
2. Формула размещения.
3. Формула сочетания.
4. Решения задач из теории вероятности на соединения.
5. Биномиальное распределение.
6. Формула Тейлора для некоторых элементарных функций.
7. Комплексные числа. Действия над комплексными числами.
8. Тригонометрическая форма комплексных чисел.
9. Извлечение корней из комплексных чисел.
10. Показательная (экспоненциальная) форма комплексных чисел.
11. Основные правила дифференцирования.
12. Основные правила интегрирования.
13. Линейные ОДУ первого порядка. Методы решения
14. Линейные однородные ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.
15. Линейные однородные ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Фундаментальное решение. Общее решение.
16. Линейные однородные ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Задача Коши.
17. Линейные неоднородные ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение. Случаи нахождения частного решения неоднородные ОДУ. Задача Коши.
18. Уравнение Рикатти.
19. Уравнение Абеля.
20. Уравнение Бернулли.
21. Численные методы при решении ОДУ первого порядка. Метод Эйлера.
22. Численные методы при решении ОДУ первого порядка. Метод Рунге-Кутты
23. Алгебры матриц. Приложения в дифференциальных уравнениях.
24. Скалярное поле. Градиент. Дивергенция. Ротор

Типовые задачи по курсу

Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

1. $y' = x, y(0) = 1,$
2. $y' = e^{2x}, y(0) = 3$
3. $y' = \frac{1}{x^2}, y(1) = -1$

Найти общее решение

- 5.1. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, f(x) = 3x + 2$
- 5.2. $\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i, f(x) = 2xe^x$
- 5.4. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, f(x) = 2 \sin x$

Однородные ОДУ

1. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$
2. $y' = \cos^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$
3. $y' = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}, y(1) = 0$

Понижение порядка уравнения

1. $y''' = \cos x$
2. $y''' = \frac{1}{x^3}, y(1) = 1, y'(1) = 1, y''(1) = -1,$
3. $y'' \operatorname{tg} x = y'$
4. $y'' = y'y$
5. $y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y''(0) = 1$

Найти общее решение

1. $y'' - y = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

Найти общее решение

1. $y'' + 2y' + y = -2$
2. $y'' - 4y' + 4y = x^2$
3. $y'' + y = 2e^x$
4. $y'' + 3y' + 2y = 3 \cos x$

Текущий контроль

МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ КОНТРОЛЕ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

1. Решение домашних заданий
2. Выполнение контрольных работ
3. Решение задач на практическом занятии
4. Устный опрос на практическом занятии

Пример домашних заданий

Задания на дом по теме «Комбинаторика»

1. Вычисления

Упростить

$$\frac{(n-2)!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n+2)! - (n+1)!}{n!} \cdot \frac{(n+1)! + n!}{(n+2)n!} \cdot \frac{(n+3)! + (n+2)!}{(n+4)(n+1)!}$$

2. Задачи на вероятности

1. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

2. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех? б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

3. а) Найти вероятность того, что событие A появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,4;

б) событие B появится в случае, если событие A наступит не менее четырех раз. Найти вероятность наступления события B , если будет произведено пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,8.

4. Устройство состоит из трех независимо работающих основных элементов. Устройство отказывает, если откажет хотя бы один элемент. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0,1. Найти вероятность безотказной работы устройства за время t , если: а) работают только основные элементы; б) включен один резервный элемент; в) включены два резервных элемента. Предполагается, что резервные элементы работают в том же режиме, что и основные, вероятность отказа каждого резервного элемента также равна 0,1 и устройство отказывает, если работает менее трех элементов.

5. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

6. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

Ответ. $P = C^3_4 C^4_6 / C^7_{10}$

7. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

Ответ. $P = C^5_8 C^4_{12} / C^9_{20} = 14/55$

8. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное, б) два окрашенных изделия, в) хотя бы одно окрашенное изделие.

Ответ. а) $P = C^1_3 C^1_2 / C^2_5 = 0,6$. б) $P = C^2_3 / C^2_5 = 0,3$. в) $P = 0,9$

9. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

10. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

11. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Требуется: а) составить закон распределения

дискретной случайной величины X – числа патронов, выданных стрелку; б) найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов.

Домашнее задание по теме «Комплексные числа»

1. Решить уравнения

$$x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 + 1 = 0$$

Записать решения в алгебраической и тригонометрической форме.

2. Вычислить

$$(3 + i) \times (2 - 3i)$$

$$(3 + i) / (2 - 3i)$$

$$\frac{1-i}{1+i}$$

$$\frac{2+i}{2-i}$$

$$\frac{3+i}{3-i}$$

$$\frac{2-5i}{2+6i}$$

3. Найти все корни в алгебраической и тригонометрической форме

$$\sqrt{1-i}$$

$$\sqrt[3]{1+i}$$

$$\sqrt[3]{1-i}$$

$$\sqrt[4]{1+i}$$

$$\sqrt[4]{1-i}$$

Тема. Дифференцирование

1. Найти производную

$$1.1. \quad y = 2\sqrt{x} - 3x + \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x}$$

$$1.2. \quad y = (x-4)(x+2)(-x+1)$$

$$1.3. \quad y = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x} - 2)$$

$$1.4. \quad y = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$$

$$1.5. \quad y = \frac{x^3 - \sqrt{x}}{x^4 + \sqrt{x}}$$

$$1.6. \quad y = \frac{(1 + \sqrt{x})(4 - \sqrt{x})}{(2 - \sqrt{x})^2}$$

$$1.7. \quad y = (3e^x + 1)(2 - e^x)$$

$$1.8. \quad y = \frac{4 \sin x}{2 + 3 \cos x}$$

$$1.9. \quad y = \sqrt[4]{x} 4^x \operatorname{tg} x$$

2. Найти производные сложных функций

- 2.1. $y_3 = y_2 + 2, \quad y_2 = \ln y_1, \quad y_1 = \sqrt[3]{x}, \quad y_3'(x) = ?$
- 2.2. $y_3 = \sin y_2, \quad y_2 = \ln y_1, \quad y_1 = e^x, \quad y_3'(x) = ?$
- 2.3. $y_3 = e^{y_2} + 2, \quad y_2 = \cos y_1, \quad y_1 = \sqrt{x}, \quad y_3'(x) = ?$
- 2.4. $y_3 = \operatorname{tg} y_2, \quad y_2 = y_1^{-y_1}, \quad y_1 = \cos x, \quad y_3'(x) = ?$
- 2.5. $y = \cos(5^{x^2+1})$
- 2.6. $y = \frac{1}{\cos e^{-2\sin x}}$
- 2.7. $y = \ln(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + e^x}})$
- 2.8. $y = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\sqrt{x}}}}$

Доказать, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет уравнению

- 3.1. $y = a^x \sin x, \quad y'' - 2y' + 2y = 0$
- 3.2. $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}, \quad xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$
- 3.3. $y = e^{4x} + 2e^{-x}, \quad y''' - 13y' - 12y = 0$
- 3.4. $y = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad (1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$

Задачи по интегральному исчислению

1. Табличные интегралы

- 1.1. $\int (x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}) dx$
- 1.2. $\int (\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x^7}}}} - \frac{x}{\sqrt[3]{x}}) dx$
- 1.3. $\int (x^5 + 5^x) dx$
- 1.4. $\int (\frac{5}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{5}) dx$
- 1.5. $\int \frac{x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{x^2} dx$

Задания на дом по теме «Ряд Тейлора»

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности указанной точки

1. $y = e^{2x}, \quad a = 0$
2. $y = e^{2x}, \quad a = 1$
3. $y = \frac{1}{1-x}, \quad a = 0$
4. $y = \ln(1+x), \quad a = 1$
5. $y = \frac{1}{x}, \quad a = 1$

Задачи по обыкновенным дифференциальным уравнениям I порядка

1. Проверить, является ли данная функция решением соответствующего дифференциального уравнения

1.1. $xy' + y = y^2, y = \frac{1}{1-x}$

1.2. $y'tgx - y = 1, y = 3\sin x - 1$

1.3. $(x-y)dx + xdy = 0, y = x(5 - \ln x)$

1.4. $dy + (2y - e^x)dx = 0, y = 5e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$

1.5. $tv'' = v', v = t^2 + 3$

1.6. $(w'')^2 = w^2, w = \frac{z^3}{12} + 1$

1.7. $2y'' = 3y^2, y = \frac{1}{x+4}$

1.8. $y''' = \frac{1}{x}, y = x^2 \ln x$

1.9. $y'' - 4y' + 3y = 0, y = 4e^x + 2e^{3x}$

1.10. $4y'' - 20y' + 25y = 0, y = 3e^{2,5x}$

2. Проверить, является ли данная функция решением соответствующей задачи Коши:

2.1. $y' = 2x, y(0) = 0$

$$y = x^2$$

2.2. $y' = 3x^2, y(1) = 0$

$$y = x^3 - 1$$

2.3. $y'' - y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1 \quad y = e^x$

3. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

3.1. $y' = 2x, y(0) = 3,$

3.2. $y' = 3x^2, y(0) = -1$

3.3. $y' = 2e^{2x}, y(0) = 3$

3.4. $y' = \frac{1}{x}, y(1) = -3$

4. Однородные ОДУ

$$4.1. \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1$$

$$4.2. \quad y' = \cos^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

$$4.3. \quad y' = \frac{\sqrt{y^2 + x^2} + x}{x}$$

$$4.4. \quad y' = \frac{x + y \cos \frac{y}{x}}{x \cos \frac{y}{x}}$$

$$4.5. \quad y' = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}}, \quad y(1) = 0$$

5. Понижение порядка уравнения

$$5.1. \quad y''' = \sin x$$

$$5.2. \quad y''' = \frac{1}{x^3}, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = -1,$$

$$5.3. \quad y'' \operatorname{tg} x = y'$$

$$5.4. \quad xy''' + y'' = x$$

$$5.5. \quad y'' = y'y$$

$$5.6. \quad y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

Задачи по разделу 3.1

Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Записать линейное ОДУ II и III порядка, если известны корни его характеристического уравнения, и его общее решение

$$1.1. \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$1.2. \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$$

$$1.3. \quad \lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$$

$$1.4. \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$$

$$1.5. \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$$1.6. \quad \lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i, \lambda_3 = 3$$

$$1.7. \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$$

$$1.8. \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$$

2. Составить линейное ОДУ, зная фундаментальную систему

$$2.1. \quad e^x, e^{-x}$$

$$2.2. \quad e^x, xe^x,$$

$$2.3. \quad 1, e^x$$

$$2.4. \quad 1, x, x^2$$

$$2.5. \quad \sin 3x, \cos 3x$$

$$2.6. \quad e^x, e^{2x}, e^{3x}.$$

$$2.7. \quad e^x, xe^x, x^2 e^x,$$

3. Найти общее решение

$$3.1. \quad y'' - y = 0$$

$$3.2. \quad y'' + y = 0$$

$$3.3. \quad y'' + 2y' + y = 0$$

$$3.4. \quad y'' - 2y' + y = 0$$

$$3.5. \quad y'''' + 2y'' - y' - 2y = 0$$

$$3.6. \quad y'''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

$$3.7. \quad y'''' + 2y'' - y' - 2y = 0$$

4. Решить задачу Коши

$$4.1. y'' - 4y' + 3y = 0$$

$$y(0) = 6, y'(0) = 8$$

$$4.2. y'' - 2y' + y = 0$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$4.3. y''' + 2y'' = 0$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1$$

$$4.4. y'' + y' = 0$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

5. Найти общее решение

$$5.1. \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2. f(x) = 3x + 2$$

$$5.2. \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2. f(x) = 3x + 2$$

$$5.3. \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0. f(x) = xe^{-x}$$

$$5.4. \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0. f(x) = 3 \sin x$$

6. Найти общее решение

$$6.1. y'' + 2y' + y = -2$$

$$6.2. y'' - 4y' + 4y = x^2$$

$$6.3. y'' + 4y' + 4y = e^x$$

$$6.4. y'' + y = 2e^x$$

$$6.5. y'' - y' = e^x \sin x$$

7. Найти общее решение неоднородного уравнения:

$$y'' - 3y' + 2y = 3x + 2$$

$$y'' + y = x^2 - 1$$

$$y'' - 2y' + y = x^2 + 1$$

$$y'' + y' = 2x - 1$$

$$y'' - y' = 3e^{2x}$$

$$y'' + y' = (x + 1)e^x$$

$$y'' + y' = 2xe^x$$

$$y'' + y' = xe^{-x}$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$$

$$y'' + 3y' + 2y = 3 \cos x$$

$$y'' + y = -3 \sin x$$

$$y'' + y = \sin 3x$$

$$y'' + y = 2(1 - x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$$

$$y'' + 9y = 36e^{3x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$$

$$y'' + y = e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

$$y'' + y = \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Задачи к разделу 3.2.

Найти частные и общее решение систем линейных ОДУ

$$1. \begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y_1' = 6y_1 + 7y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' = y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

Примеры

1. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Ответ 40

2. Если матрица – диагональная, то определитель равен произведению диагональных элементов

Доказательство по индукции.

Для $n = 2$ очевидно. $D = a_{11}a_{22}$

Докажем для $n = 3$.

Разлагаем по первому столбцу. Тогда получим $D = a_{11}a_{22}a_{33}$

И далее продолжим.

1. Решить систему уравнений

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9$$

$$2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5$$

$$x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0$$

$$D = 27,$$

$$D_1 = 81, \quad D_2 = -108, \quad D_3 = -27, \quad D_4 = 27,$$

Отсюда

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1.$$

2. При каких значениях k система

$$kx_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + kx_2 = 0$$

$$D = k^2 - 1$$

равен нулю при $k = \pm 1$.

При этом получим

$$x_1 \pm x_2 = 0$$

имеет решения, отличные от 0.

Раздел 5. Скалярные и векторные поля

1. Вычислить градиент скалярного поля в указанных точках:

- | | |
|--|--|
| 1. $u = \frac{x^2 z}{y}, \quad M(1, 2, 3)$ | 6. $u = \frac{xy^2}{z}, \quad M(1, 2, 3)$ |
| 1. $u = \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{2}{z}, M(1, 1, 1)$ | 7. $u = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{y^2} + \frac{5}{z^3}, M(1, 1, 1)$ |
| 3. $u = x^2 + \cos yz, M(1, \pi, \frac{1}{2})$ | 8. $u = y^2 - \sin xz, M(\frac{1}{2}, 5, \pi)$ |
| 4. $u = xe^{yz}, \quad M(1, 1, 1)$ | 9. $u = ye^{2xz}, \quad M(1, 1, 1)$ |
| 5. $u = y \ln(x+z), \quad M(2, 3, 4)$ | 10. $u = x \ln(2y+3z), \quad M(1, 1, 1)$ |

2. Вычислить дивергенцию векторного поля в указанных точках.

- | | |
|--|--|
| 1. $\vec{a} = (3x^2, 2y+z, z-2y)$
$M(0, 1, 1)$ | 6. $\vec{a} = (3x^2, 2x+y, z^3-x)$
$M(5, 1, 3)$ |
| 2. $\vec{a} = (\cos xy, \sin xy, \operatorname{tg} z)$
$M(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ | 7. $\vec{a} = (\sin xz, \cos yz, \sin 3z)$
$M(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ |
| 3. $\vec{a} = (x+2e^y, y+e^{2z}, z+e^{2x})$
$M(1, 1, 1)$ | 8. $\vec{a} = (y+2e^x, x+e^{2y}, 2z+e^x)$
$M(1, 1, 0)$ |
| 4. $\vec{a} = (\ln(2x+z), \ln z, \ln(x-z))$
$M(2, 5, 7)$ | 9. $\vec{a} = (2^{x+y}, 3^{x+2y}, 4^{y-x})$
$M(0, 1, 0)$ |
| 5. $\vec{a} = (y^2 + e^{2z}, x^2 + e^{3z}, y^2 + e^{2x})$
$M(0, 0, 0)$ | 10. $\vec{a} = (y^2 + \ln z, x^2 + \ln 3y, z^3)$
$M(0, 1, 1)$ |

3. Вычислить ротор векторного поля

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. $\vec{a} = \{y, -2x, z^2\}$ | 5. $\vec{a} = \{3z, -2y, 2y\}$ |
| 2. $\vec{a} = \{x, yz, -z\}$ | 6. $\vec{a} = \{yz, 2xz, xy\}$ |
| 3. $\vec{a} = \{x, -3z^2, y\}$ | 7. $\vec{a} = \{\sin x, 2z^2, e^{2y}\}$ |
| 4. $\vec{a} = \{-x^2 y^3, 4, x\}$ | 8. $\vec{a} = \{3y, -3x, x\}$ |

Примеры контрольных работ

Контрольная 1 (вариант 1)

1. Найти производную

1.1. $y = 2\sqrt[3]{x} - 3x^3 + \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x}$

1.2. $y = (x-2)(x-1)(-x+1)$

1.3. $y = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x} - 2)$

1.4. $y = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

1.5. $y = (3e^x - 1)(2 - e^x)$

1.6. $y = \frac{4\sin^2 x}{2 + 3\cos^2 x}$

1.7. $y = \sqrt[4]{x} 4^x \operatorname{tg} x$

2. Найти производные сложных функций

2.1. $y_3 = y_2^2 + 2, y_2 = \ln y_1, y_1 = \sqrt[3]{x}, y_3'(x) = ?$

2.2. $y_3 = \sin^2 y_2, y_2 = \ln y_1, y_1 = e^{2x}, y_3'(x) = ?$

2.3. $y_3 = e^{2y_2} + 2, y_2 = \cos^2 y_1, y_1 = \sqrt[3]{x}, y_3'(x) = ?$

2.4. $y_3 = \operatorname{tg} y_2, y_2 = y_1^{-y_1}, y_1 = \cos^2 x, y_3'(x) = ?$

3. Проинтегрировать

3.1. $\int \frac{x^3 - 2x}{x} dx$

3.2. $\int \frac{x^3 - 5x^{3/2}}{3x^4} dx$

3.3. $\int \left(\frac{5}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{5} \right) dx$

3.4. $\int x \cos^2 x dx$

3.5. $\int e^x \cos(e^x) dx$

4. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

4.1. $y'' = 2x, y(0) = 1, y'(0) = 0$

4.2. $y'' = e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 0$

4.3. $y'' = \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'(0) = -1$

5. Найти общее решение

5.1. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, f(x) = 3x + 2$

5.2. $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i, f(x) = 2xe^x$

5.3. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, f(x) = 2 \cos x$

Контрольная работа №2

Найти производную

1.1. $y = 2\sqrt[3]{x} - 3x^3 + \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x}$

1.2. $y = (x-2)(x-1)(-x+1)$

1.3. $y = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x} - 2)$

1.4. $y = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

1.5. $y = (3e^x - 1)(2 - e^x)$

1.6. $y = \frac{4\sin^2 x}{2 + 3\cos^2 x}$

1.7. $y = \sqrt[4]{x} 4^x \operatorname{tg} x$

2. Найти производные сложных функций

2.1. $y_3 = y_2^2 + 2, \quad y_2 = \ln y_1, \quad y_1 = \sqrt[3]{x}, \quad y_3'(x) = ?$

2.2. $y_3 = \sin^2 y_2, \quad y_2 = \ln y_1, \quad y_1 = e^{2x}, \quad y_3'(x) = ?$

2.3. $y_3 = e^{2y_2} + 2, \quad y_2 = \cos^2 y_1, \quad y_1 = \sqrt[3]{x}, \quad y_3'(x) = ?$

2.4. $y_3 = \operatorname{tg} y_2, \quad y_2 = y_1^{-y_1}, \quad y_1 = \cos^2 x, \quad y_3'(x) = ?$

3. Проинтегрировать

3.1. $\int \frac{x^3 - 2x}{x} dx$

3.2. $\int \frac{x^3 - 5x^{3/2}}{3x^4} dx$

3.3. $\int \left(\frac{5}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{5} \right) dx$

3.4. $\int x \cos^2 x dx$

3.5. $\int e^x \cos(e^x) dx$

4. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

1. $y' = x, y(0) = 1,$

2. $y' = e^{2x}, y(0) = 3$

3. $y' = \frac{1}{x^2}, y(1) = -1$

5. Однородные ОДУ

1. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$

2. $y' = \cos^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$

3. $y' = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0$

6. Понижение порядка уравнения

1. $y''' = \cos x$
2. $y''' = \frac{1}{x^3}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = -1$,
3. $y'' \operatorname{tg} x = y'$
4. $y'' = y'y$
5. $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y''(0) = 1$

7. Найти общее решение

1. $y'' - y = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

8. Найти общее решение

1. $y'' + 2y' + y = -2$
2. $y'' - 4y' + 4y = x^2$
3. $y'' + y = 2e^x$
4. $y'' + 3y' + 2y = 3 \cos x$

Контрольная работа № 3**Вариант 1**

1. Найти производную

$$y = \sqrt[4]{x} 2^{\sin x} \operatorname{ctg} x$$

2. Найти производные сложных функций

$$y_3 = \operatorname{tg} y_2, \quad y_2 = y_1^{-\ln y_1}, \quad y_1 = \sin^2 x, \quad y_3'(x) = ?$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

$$y = \sin^2 x - x^2 \quad [-\pi, \pi]$$

4. Проинтегрировать

$$\int \sqrt{x^2 + 1} x^3 dx$$

5. Решить задачу Коши

$$y'' = \frac{1}{x^2}, \quad y(1) = 0, \quad y(1) = 1$$

6. Найти общее решение

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i, \quad f(x) = x^2 e^x$$

7. Решить ОДУ

$$y' = \frac{x + y \cos \frac{y}{x}}{x \cos \frac{y}{x}}$$

8. Решить $y'' + 2y' + y = e^x$

Контрольная работа № 4

Проинтегрировать

1. $\int \frac{x^3 - 2x}{x} dx$

2. $\int \frac{x^3 - 5x^{3/2}}{3x^4} dx$

3. $\int (\frac{5}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{5}) dx$

4. $\int x \cos^2 x dx$

5. $\int e^x \cos(e^x) dx$

Понижение порядка уравнения

1. $y''' = \cos x$

2. $y''' = \frac{1}{x^3}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = -1$,

3. $y'' \operatorname{tg} x = y'$

4. $y'' = y'y$

5. $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y''(0) = 1$

Проинтегрировать

1. $\int \frac{x^3 - 2x}{x} dx$

2. $\int \frac{x^3 - 5x^{3/2}}{3x^4} dx$

3. $\int (\frac{5}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{5}) dx$

4. $\int x \cos^2 x dx$

5. $\int e^x \cos(e^x) dx$

Понижение порядка уравнения

1. $y''' = \cos x$

2. $y''' = \frac{1}{x^3}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = -1$,

3. $y'' \operatorname{tg} x = y'$

4. $y'' = y'y$

5. $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y''(0) = 1$

Контрольная работа ОДУ

1. Найти производную

1.1. $y = 2\sqrt[3]{x} - 3x^3 + \frac{1}{x} + \sqrt[4]{x}$

1.2. $y = (x-2)(x-1)(-x+1)$

1.3. $y = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x} - 2)$

1.4. $y = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

1.5. $y = (3e^x - 1)(2 - e^x)$

1.6. $y = \frac{4\sin^2 x}{2 + 3\cos^2 x}$

1.7. $y = \sqrt[4]{x} 4^x \operatorname{tg} x$

2. Найти производные сложных функций

2.1. $y_3 = y_2^2 + 2, \quad y_2 = \ln y_1, \quad y_1 = \sqrt[3]{x}, \quad y_3'(x) = ?$

2.2. $y_3 = \sin^2 y_2, \quad y_2 = \ln y_1, \quad y_1 = e^{2x}, \quad y_3'(x) = ?$

2.3. $y_3 = e^{2y_2} + 2, \quad y_2 = \cos^2 y_1, \quad y_1 = \sqrt[3]{x}, \quad y_3'(x) = ?$

2.4. $y_3 = \operatorname{tg} y_2, \quad y_2 = y_1^{-y_1}, \quad y_1 = \cos^2 x, \quad y_3'(x) = ?$

3. Проинтегрировать

3.1. $\int \frac{x^3 - 2x}{x} dx$

3.2. $\int \frac{x^3 - 5x^{3/2}}{3x^4} dx$

3.3. $\int \left(\frac{5}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{5} \right) dx$

3.4. $\int x \cos^2 x dx$

3.5. $\int e^x \cos(e^x) dx$

4. Решить задачу Коши и построить интегральную кривую

1. $y' = x, y(0) = 1,$

2. $y' = e^{2x}, y(0) = 3$

3. $y' = \frac{1}{x^2}, y(1) = -1$

5. Однородные ОДУ

$$1. \quad y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$$

$$2. \quad y' = \cos^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

$$3. \quad y' = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}}, \quad y(1) = 0$$

6. Понижение порядка уравнения

$$1. \quad y''' = \cos x$$

$$2. \quad y''' = \frac{1}{x^3}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = -1,$$

$$3. \quad y'' \operatorname{tg} x = y'$$

$$4. \quad y'' = y'y$$

$$5. \quad y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

7. Найти общее решение

$$1. \quad y'' - y = 0$$

$$2. \quad y'' + 2y' + y = 0$$

$$3. \quad y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$$

8. Найти общее решение

$$1. \quad y'' + 2y' + y = -2$$

$$2. \quad y'' - 4y' + 4y = x^2$$

$$3. \quad y'' + y = 2e^x$$

$$4. \quad y'' + 3y' + 2y = 3 \cos x$$

- **Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Для контроля знаний студентов по данной дисциплине необходимо проводить текущий и промежуточный контроль.

Текущий контроль выполняется в виде приема допусков и защит практических работ, устного опроса на практических занятиях, выполнения контрольной работы.

Промежуточный контроль проводится в виде зачета с оценкой, на котором обсуждаются теоретические и практические вопросы курса. Практическая часть частично зачитывается по результатам работ, выполненным в семестре, на основе балльно-рейтинговой системы. При рейтинговой системе все знания, умения и навыки, приобретаемые студентами в результате изучения дисциплины, оцениваются в баллах.

Оценка качества работы в рейтинговой системе является накопительной и используется для оценивания системной работы студентов в течение всего периода обучения. Максимально-возможная сумма баллов по всем видам заданий приравнивается 100 %. При этом также учитывается посещаемость занятий – 0,5 балла за посещение одного занятия продолжительностью 1 академический час, при этом максимальный балл за посещаемость равен 17. Каждое практическое задание оценивается в зависимости от сложности от 1 до 10 баллов. Окончательно задания формируются перед началом семестра преподавателем в зависимости от тем НИР студентов. Максимальный балл за каждый вид задания определяется преподавателем в зависимости от уровня сложности задания в начале семестра, проставляется в журнале успеваемости и доводится до сведения студентов.

Чтобы быть допущенным к зачету, студент обязан проделать и сдать **все** практические работы. Работы, пропущенные без уважительной причины, а также работы, не защищенные студентом в течение 2х недель после проведения практической части, оцениваются преподавателем с понижающим коэффициентом 0,5.

Преподаватель может использовать «**штрафы**» в виде уменьшения набранных баллов за пропуск лекционных занятий, за нарушение сроков выполнения учебной работы, за систематический отказ отвечать на семинарских занятиях и т.д.

Результаты работы студентов фиксируются преподавателем в журнале успеваемости. В течение семестра проводится 2 промежуточные аттестации, о результатах которых преподаватель сообщает студенту, куратору группы и заведующему кафедры.

Если к моменту окончания семестра студент набирает не менее 55 % от максимально возможной суммы баллов, то он получает допуск к зачету.

Студент, сдающий зачет, получает баллы за зачетное задание.

Если к началу зачетной недели набранное студентом суммарное количество баллов с учетом дополнительных, составляет **менее 55 % от максимальной суммы баллов**, он не допускается к сдаче зачета. Такие студенты могут довести свой балл до необходимой суммы в течение последней (зачетной) недели семестра, написав контрольную работу по теме, за которую студент получил наименьшее количество баллов. Выполненные практические задания на зачетной неделе **не принимаются**.

Шкала выставления оценок за зачет:

% от максимальной суммы баллов	оценка
86 - 100 %	5
71-85	4

55-70	3
-------	---

10. Ресурсное обеспечение

• Перечень основной и дополнительной учебной литературы

Основная учебная литература

1. **Бахвалов Николай Сергеевич.** Численные методы : Учебное пособие для вузов / Бахвалов Николай Сергеевич, Жидков Николай Петрович, Кобельков Георгий Михайлович. - 6-е изд. - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. - 636с. - (Классический университетский учебник). - Серия основана в 2002 году по инициативе ректора МГУ В.А.Садовниченко и посвящена 250-летию Московского университета. - Список лит.:с.624.-Предм.указ.:с.629. - ISBN 978-5-94774-815-4.
2. **Демидович Б.П., Марон** Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. - Лань-Трейд, 2016. - ISBN 5-8114-0677-0

Дополнительная учебная литература

1. **Скатецкий В.Г.** Математические методы в химии: Учебное пособие для студентов вузов. М.: ТетраСистемс, 2006. – 368с. - Лит.:с.365
2. **Типовые расчеты по физической и коллоидной химии** : учебное пособие / Васюкова Александра Николаевна [и др.]. - СПб. : Лань, 2014. - 144с. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Прил.:с.113.-Список лит.:с.138. - ISBN 978-5-8114-1605-9.
3. Гумеров А.М. математическое моделирование химико-технологических процессов. КолосС, 2008 г.
4. **Попов Александр Михайлович.** Вычислительные нанотехнологии : Учебное пособие для вузов / Попов Александр Михайлович. - М. : КноРус, 2014. - 312с. : ил. - (Бакалавриат). - Список лит.:с.301. - студенты. - бакалавриат. - ISBN 9785406005606.
5. Гордин В. А. [Дифференциальные и разностные уравнения: какие явления они описывают и как их решать: учебное пособие](#), Издательство: Издательский дом Высшей школы экономики, 2016 (ЭБС Университетская библиотека онлайн)

Периодические издания

- Вестник Московского университета. Серия 2, Химия : научный журнал / учредитель: Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова, фак-т химии. - М. : МГУ. - Журнал, основан в ноябре 1946 года. - Выходит отдельной серией с 1960 года - Доступ к архиву статей с 1998 г. на сайте журнала: <http://www.chem.msu.ru/rus/vmgu/>
- Геохимия / учредитель: РАН, отделение геологии, геофизики, геохимии и горных наук РАН [и др.]. - М. : МАИК НАУКА. - Журнал, основан в январе 1956 года академиком А.П. Виноградовым. - Содержание выпусков и аннотации статей на английском языке с 1996 г. на сайте издательства: <http://www.maik.rssi.ru/cgi-perl/search.pl?lang=rus>
- Журнал аналитической химии / учредитель: РАН, отделение физикохимии и технологии неорганических материалов и Институт геохимии и аналитической химии. - М. : МАИК Наука. - Журнал, основан в 1946 году. - Содержание выпусков с 1999 г. на сайте журнала: <http://www.zhakh.ru/Lists/Content/view.aspx>
- Журнал неорганической химии / учредитель: РАН, отд-ние физикохимии и технологии неорганических материалов. - М. : МАИК НАУКА. - Журнал, основан в январе 1956 года. - Содержание выпусков и аннотации статей с 1996 г. на английском языке на сайте издательства: <http://www.maik.rssi.ru/cgi-perl/search.pl?lang=rus>
- Заводская Лаборатория (доступ через Elibrary.ru.)

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

Электронно-библиотечные системы и базы данных

- Университетская библиотека онлайн – www.biblioclub.ru - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
- ZNANIUM – www.znanium.com -- Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
- БД российских журналов East View : <http://dlib.eastview.com> - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
- Электронная библиотека диссертаций (ЭБД) РГБ: <http://diss.rsl.ru/> - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
- Реферативная и библиографическая БД Web of Science, JCR компании Thomson Reuters: <http://webofknowledge.com> Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
- Реферативная и библиографическая БД SCOPUS: <http://www.scopus.com/home.url> Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
- Elibrary.ru. Научная электронная библиотека (РУНЭБ) Режим доступа: ограниченный по логину и паролю

Научные поисковые системы

- SCIENCE INDEX на основе данных РИНЦ http://elibrary.ru/project_risc.asp Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
- Scopus <http://www.scopus.com/home.url> Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
- Web of Science <http://webofknowledge.com> Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
- Научная электронная библиотека РФФИ <http://www.elibrary.ru> Режим доступа: ограниченный по логину и паролю

Профессиональные ресурсы сети «Интернет»

<http://window.edu.ru/> - Федеральная информационная система: «Единое окно доступа к информационным ресурсам»

<http://ben.irex.ru> БЕН Библиотека естественных наук

<http://www.gpntb.ru> ГПНТБ Государственная публичная научно-техническая библиотека

<http://ban.pu.ru> БАН Библиотека Академии наук

<http://www.nlr.ru> РНБ Российская национальная библиотека

<http://www.elibrary.ru> Научная электронная библиотека РФФИ

<http://www.lib.msu.su> Библиотека МГУ

<http://www.kge.msu.ru> Библиотеки химической литературы

<http://www.lib.asu.ru> Электронная библиотека зарубежных изданий

<http://www.chem.asu.ru> Электронная библиотека/неорганическая химия

<http://www.chem.port.ru/>

<http://www.ars.org/portalchemistry/>

<http://www.rusanalytchem.org/> <http://www.rusanalytchem.org/>

<http://www.chem.msu.su> портал фундаментального химического образования России

<http://lib.uni-dubna.ru/biblweb/> Библиотека университета «Дубна»

