

**Методические указания к курсовой работе по дисциплине
«Математические методы в электронике»**

Тема курсовых работ: «Имитационное моделирование процессов в радиотехнических цепях на основе дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка».

Задачи, решаемые в курсовой работе:

1. Составление по схемам радиотехнических цепей дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка (каждая схема соответствует уравнению определённого порядка)
2. Обоснование характеристик и параметров цепи, значения которых применяются в дифференциальном уравнении.
3. Решение однородного и неоднородного дифференциального уравнения 1-го порядка в СКМ Mathcad с использованием операторов. Анализ физического смысла полученного дифференциальных уравнений. Анализ полученных решений данных дифференциальных уравнений.
4. Решение неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка в СКМ Mathcad с использованием операторов. Анализ физического смысла полученного дифференциального уравнения. Анализ полученных решений данных дифференциальных уравнений.

**Пример выполнения курсовой работы по дисциплине
«Математические методы в электронике»**

СОСТАВЛЕНИЕ ПО СХЕМЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО ПОРЯДКА

С помощью дифференциального уравнения можно смоделировать любой процесс. Самым простым примером дифференциального уравнения является наличие в цепи сопротивления и ёмкости (в данном случае резистора и конденсатора соответственно).

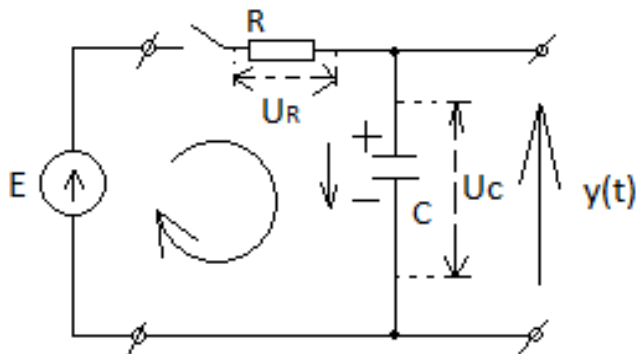


Рисунок 1 Графическая модель процесса зарядки конденсатора

Согласно второму закону Кирхгофа (алгебраическая сумма падений напряжения в контуре равна алгебраической сумме ЭДС) данный контур будет описываться следующим уравнением:

$$E = U_R(t) + U_C(t) \quad (1)$$

По закону Ома для участка цепи, напряжение на сопротивлении будет определяться как:

$$U_R(t) = R * Y(t) \quad (2)$$

Напряжение на ёмкости будет определяться следующим выражением:

$$U_c(t) = \frac{q(t)}{C} \quad (3)$$

Сила тока — физическая величина I , равная отношению количества заряда Δq прошедшего через некоторую поверхность за время Δt к величине этого промежутка времени:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (4)$$

Из определения (4) следует:

$$q(t) = \int Y(t) dt \quad (5)$$

Следовательно:

$$U_c(t) = \frac{1}{C} \int Y(t) dt \quad (6)$$

Уравнение по второму закону Кирхгофа примет следующий вид:

$$E = R * Y(t) + \frac{1}{C} \int Y(t) dt \quad (7)$$

Пусть $U_c(t) = y(t)$, тогда:

$$Y(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \quad (8)$$

Где $y(t)$ – выходной сигнал. Преобразуем уравнение (7) к следующему виду:

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = E \quad (9)$$

Разделим обе части уравнения (9) на величину RC :

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = V(t) \quad (10)$$

Где $V(t) = \frac{E}{RC}$

Пусть $\frac{1}{RC} = \alpha$, тогда уравнение (10) примет следующий вид:

$$y'(t) + \alpha y(t) = V(t) \quad (11)$$

Уравнение (11) есть неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка, описывающее процессы, происходящие в данной электротехнической цепи.

Если $V(t) = 0$, тогда уравнение (11) будет иметь следующий вид:

$$y'(t) + \alpha y(t) = 0 \quad (12)$$

Уравнение (12) есть однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

ОБОСНОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК И ПАРАМЕТРОВ ЦЕПИ, ЗНАЧЕНИЯ КОТОРЫХ ПРИМЕНЯЮТСЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Полученные дифференциальные уравнения первого порядка содержат следующие параметры:

- $\alpha = \frac{1}{RC}$ есть величина, характеризующая скорость заряда (разряда) конденсатор данной цепи. (т.е. чем больше коэффициент α , тем быстрее происходит процесс заряда (разряда));
- $T = RC$ – постоянная времени (промежуток времени, в течение которого реакция схемы на единичный скачок (функция Хевисайда) достигает $1 - 1/e \approx 63.2\%$ от своего конечного значения. Также постоянная времени характеризует время убывания реакции до уровня $1/e \approx 36.8\%$ от своего первоначального значения. Конденсатор разряжается до 1% от своего первоначального значения за время 5τ ($1/e^5 * 100\% \approx 1\%$).

РЕШЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СКМ Mathcad

Для решения полученных дифференциальных уравнений, зададим следующие параметры:

$\alpha := 1.5$	величина $1/RC$
$t := 0, 0.1 \dots 20$	интервал дискретизации
$t0 := 2$	время включения источника ЭДС
$tk := 10$	время отключения источника ЭДС
$V(t) := \Phi(t - t0) - \Phi(t - tk)$	единичный скачок напряжения (входной сигнал)

Зададим область принятия решения данного дифференциального уравнений и решим уравнение с помощью оператора **Odesolve**:

Given

$$y'(t) = -\alpha y(t) + \alpha V(t) \quad \text{неоднородное ДУ 1-го порядка}$$

$$y(0) = 0 \quad \text{начальное условие}$$

$$y := \text{Odesolve}(t, 20, 200)$$

Где t – имя переменной, относительно которой решается уравнение, 20 – конец интервала интегрирования, 200 – необязательный внутренний параметр, определяющий число шагов интегрирования, на которых решается дифференциальное уравнение.

$\text{Odesolve}([vf], x, b, [step])$ Выдает функцию или вектор функций x , представляющий решения системы уравнений полного дифференциала в решающем блоке. vf опущена при решении единственной ODE.

Частное решение дифференциального уравнения 1-го порядка, где $V(t)$ – входной сигнал, $y(t)$ – график изменения напряжения на ёмкости (прохождение импульса через RC цепь):

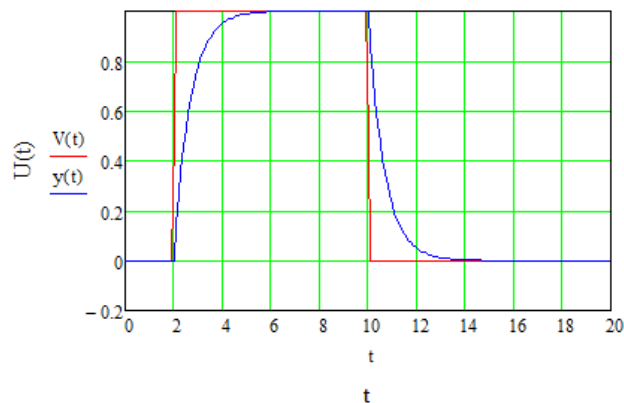


Рисунок 2 График процесса по схеме радиотехнической цепи (RC-контур) входного ($V(t)$) и выходного ($y(t)$) сигнала

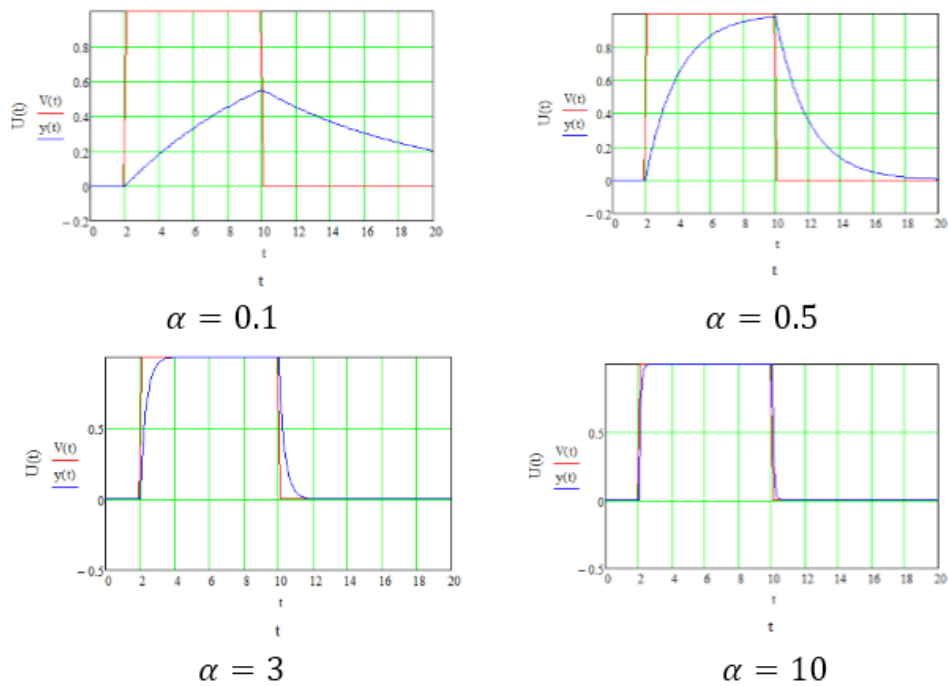


Рисунок 3 Графики процесса по схеме радиотехнической цепи (RC-контур) входного ($V(t)$) и выходного ($y(t)$) сигнала при различных значениях α

Найдём решения для однородного дифференциального уравнения 1-го порядка, то есть для уравнения:

$$y'(t) + \alpha y(t) = 0$$

Для этого проведём те же операции что и с неоднородным дифференциальным уравнением:

Given

$$y'(t) = -\alpha \cdot y(t) + 0$$

$$y(0) = 10$$

$$y := \text{Odesolve}(t, 20, 200)$$

0 – есть правая часть дифференциального уравнения (однородного).

Так как правая часть данного уравнения является входным сигналом, для того чтобы не наблюдать обычную прямую, был задан начальный заряд на конденсаторе $y(0)=10$.

Частное решение однородного дифференциального уравнения 1-го порядка:

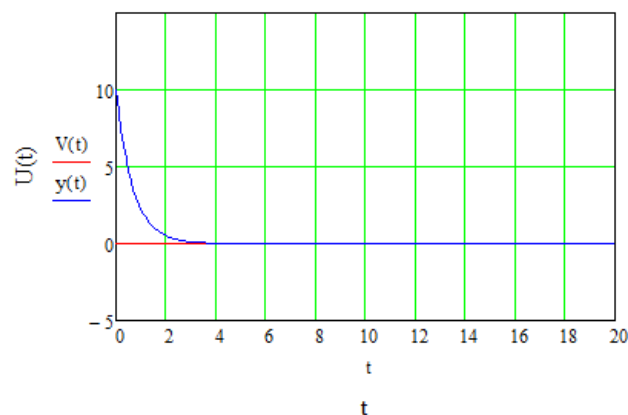


Рисунок 4 График процесса по схеме радиотехнической цепи (RC-контур) входного ($V(t)$) и выходного ($y(t)$) сигнала при $V(t)=0$

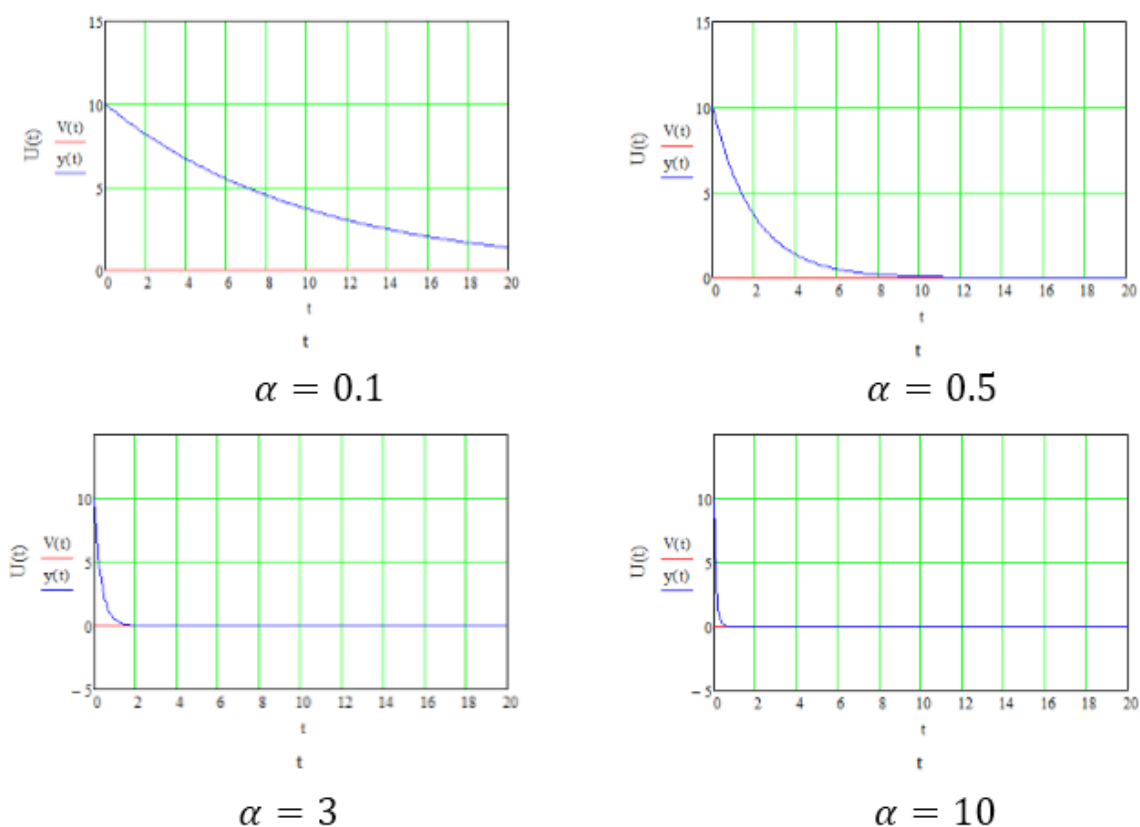


Рисунок 5 Графики процесса по схеме радиотехнической цепи (RC-контур) входного ($V(t)$) и выходного ($y(t)$) сигнала при $V(t)=0$ и различных значениях α

АНАЛИЗ ФИЗИЧЕСКОГО СМЫСЛА ПОЛУЧЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ $y'(t) + \alpha y(t) = V(t)$

- $y'(t) + \alpha y(t) = 0$

В полученных дифференциальных уравнениях величина $y'(t)$ - есть величина, характеризующая падения напряжения на резисторе. $\alpha y(t)$ - падение напряжения на конденсаторе (данные уравнения были получены по 2-му закону Кирхгофа)

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

При $\alpha = 1.5$ частное решение неоднородного дифференциального уравнения имеет следующий вид:

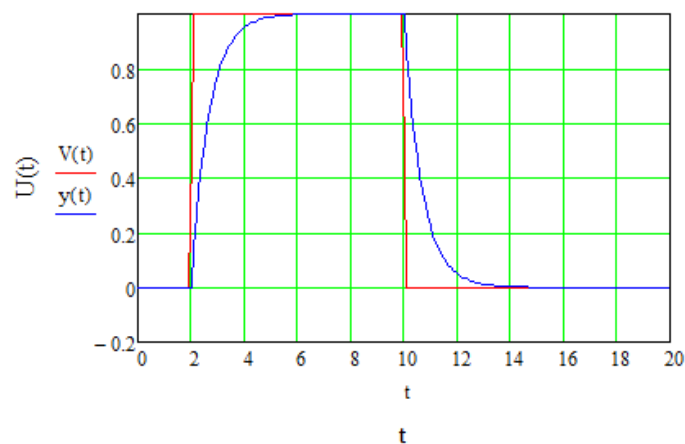


Рисунок 6 График процесса по схеме радиотехнической цепи (RC-контур) входного ($V(t)$) и выходного ($y(t)$) сигнала

Данное решение описывает процесс изменения заряда на конденсаторе при включении и отключении ЭДС.

Частное решение однородного дифференциального уравнения:

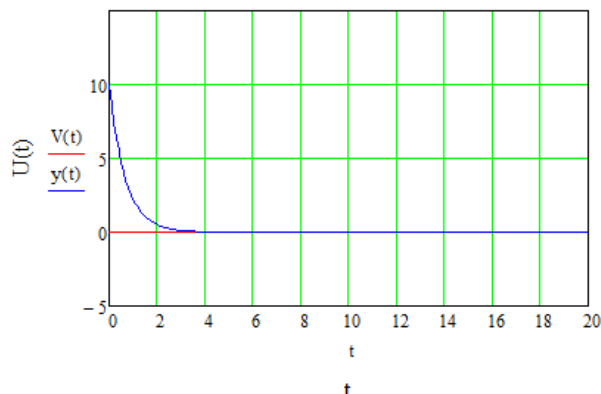


Рисунок 7 График процесса по схеме радиотехнической цепи (RC-контур) входного ($V(t)$) и выходного ($y(t)$) сигнала при $V(t)=0$

Описывает процессы в цепи при отключенном ЭДС и при наличии исходного заряда на конденсаторе

СОСТАВЛЕНИЕ ПО СХЕМЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКОЙ ЦЕПИ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА

Колебательный контур — осциллятор, представляющий собой электрическую цепь, содержащую соединённые катушку индуктивности и конденсатор. В такой цепи могут возбуждаться колебания тока (и напряжения).

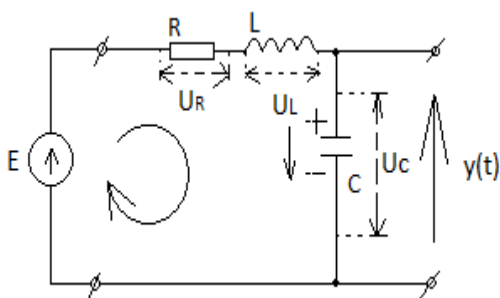


Рисунок 8 Графическая схема RLC контура с источником ЭДС

В данном контуре содержатся два энергоёмких элемента: индуктивность L и ёмкость C . Процессы, происходящие в данном контуре можно описать при помощи дифференциального уравнения.

Согласно второму закону Кирхгофа, сумма падений напряжений на элементах данной цепи будет равна:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = e(t) \quad (13)$$

Напряжение на элементах будут соответственно равны:

$$U_R(t) = R * i(t) \quad (14)$$

$$U_C(t) = \frac{1}{C} * \int i(t) dt \quad (15)$$

$$U_L(t) = L * \frac{di(t)}{dt} \quad (16)$$

Пусть $U_C(t) = y(t) = \frac{1}{C} * \int i(t) dt$

Следовательно, $i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}$

Тогда выражения для падения напряжения элементов цепи преобразуются к виду:

$$U_R(t) = RC \frac{dy(t)}{dt} \quad (17)$$

$$U_C(t) = y(t) \quad (18)$$

$$U_L(t) = LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} \quad (19)$$

Неоднородное дифференциальное уравнение 2-го примет следующий вид:

$$LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = e(t) \quad (20)$$

Разделим полученное уравнение на величину LC и обозначим величину

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \text{ а величину } \frac{1}{LC} = \omega_0^2:$$

$$y''(t) + 2\beta y'(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 e(t) \quad (21)$$

ОБОСНОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК И ПАРАМЕТРОВ ЦЕПИ, ЗНАЧЕНИЯ КОТОРЫХ ПРИМЕНЯЮТСЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Полученное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка имеет следующие параметры цепи:

- $\beta = \frac{R}{2L}$ — Является коэффициентом затухания (коэффициент поглощения);
- $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ — Зависит только от индуктивности катушки и емкости конденсатора и определяет частоту незатухающих (гармонических) свободных колебаний в контуре, если бы в нем не было потерь;
- $\tau = \frac{1}{\beta}$ — Является временем релаксации контура, т.е. временем, за которое амплитуда собственных затухающих колебаний уменьшается в e раз;
- $\theta = \ln \frac{X_n}{X_{n+1}}$ — Логарифмический декремент затухания, где X_n и X_{n+1} — два последовательных максимальных отклонения колеблющейся величины в одну и ту же сторону. Логарифмический декремент затухания — это величина, обратная числу колебаний N_e , за которые амплитуда колебаний убывает в $e \approx 2,7$ раза: $\theta = \frac{1}{N_e}$

РЕШЕНИЕ ПОЛУЧЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЙ В СКМ Mathcad

Для решения полученного дифференциального уравнения, зададим следующие параметры:

$t0 := 0.5$	время включения ЭДС
$Te := 0.5$	длительность сигнала
$P(t) := \Phi(t - t0) - \Phi(t - t0 - Te)$	интервал на котором подаём входной сигнал
$F := 20$	
$w := 2 \cdot \pi \cdot F$	
$e(t) := H \cdot 50 \cdot P(t) \cdot \sin[w \cdot (t - t0)]$	сигнал на входе
$t := 0, 0.001 \dots 1.5$	интервал дискретизации
$\beta := \frac{5}{Te}$	коэффициент затухания

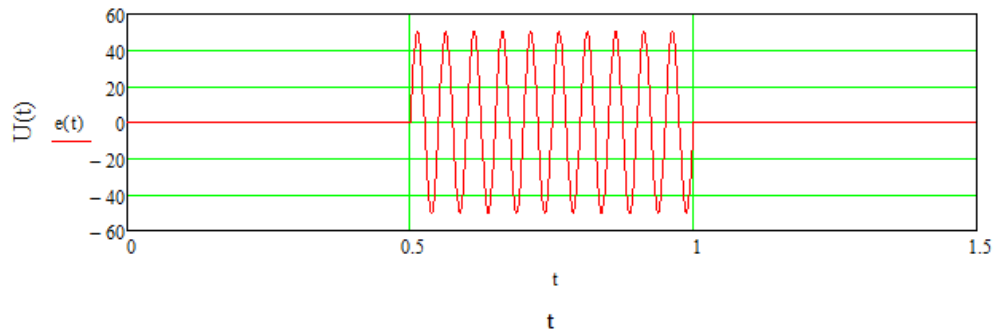


Рисунок 9 График процесса по схеме радиотехнической цепи (RLC-контур) входного сигнала $e(t)$

Зададим область принятия решения данного дифференциального уравнений и решим уравнение с помощью оператора Odesolve:

Given

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2 \cdot \beta \cdot \frac{d}{dt}y(t) + w^2 \cdot y(t) = w^2 \cdot e(t)$$

$$y(t_0) = 0$$

$$y'(t_0) = 0$$

$$y := \text{Odesolve}(t, 1.5, 1500)$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка:

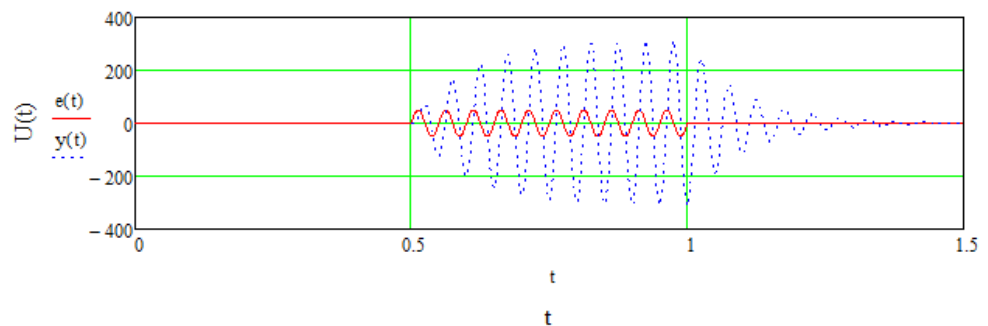
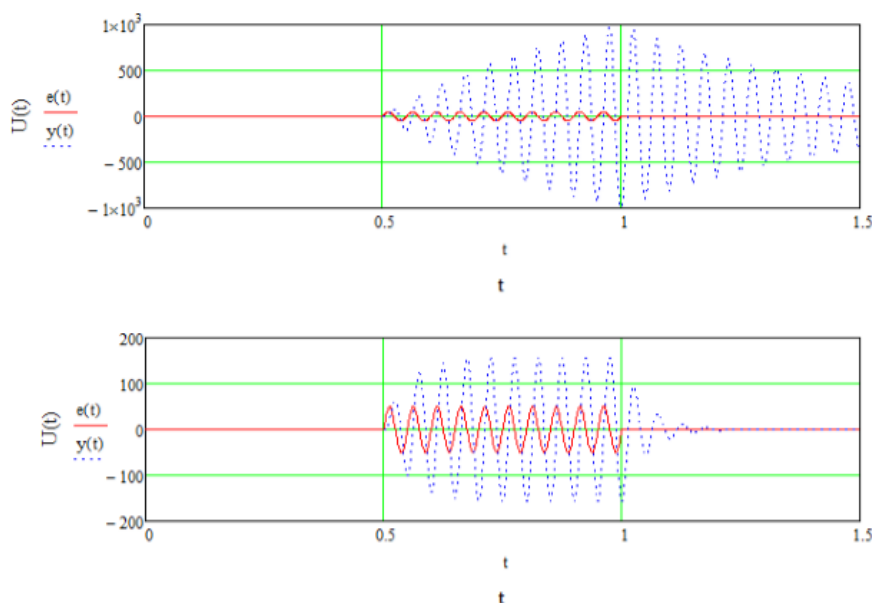


Рисунок 10 График процесса по схеме радиотехнической цепи (RLC-контур) входного ($e(t)$) и выходного ($y(t)$) сигнала



$$\beta = \frac{1}{T_e} = 2$$

$$\beta = \frac{10}{T_e} = 20$$

Рисунок 11 График процесса по схеме радиотехнической цепи (RLC-контур) входного ($e(t)$) и выходного ($y(t)$) сигнала при различных значениях β

АНАЛИЗ ФИЗИЧЕСКОГО СМЫСЛА ПОЛУЧЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Данное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка было получено путём применения 2-го закона Кирхгофа.

В уравнении $y''(t)$ является величиной, описывающей падение напряжения на катушке индуктивности, $2\beta y'(t)$ - падение напряжения на резисторе, $\omega^2 y(t)$ - падение напряжения на конденсаторе.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

При $\beta = 10$, $\omega = 2\pi f = 2\pi * 20 = 125.664$, следовательно данное решение описывает процесс реализации свободных затухающих колебаний:

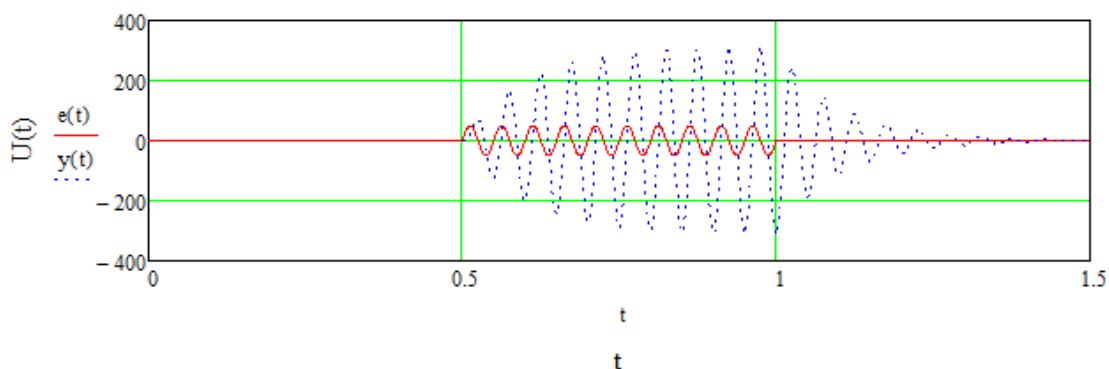


Рисунок 12 График процесса по схеме радиотехнической цепи входного ($e(t)$) и выходного ($y(t)$) сигнала

При описании характеристик дифференциального уравнения была рассмотрена частота гармонических колебаний, хотя в решении используется частота собственных затухающих колебаний. Данные величины имеют следующее соотношение:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Стоит так же отметить, что коэффициент затухания β , частота колебаний ω и логарифмический декремент затухания связаны следующим соотношением :

$$\theta = \frac{2\pi\beta}{\omega}$$

ВЫВОДЫ ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ:

На основе схем радиотехнических цепей составлены дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядка, описывающие процессы, происходящие в радиотехнических цепях.

Рассмотрен физический смысл уравнений: полученные дифференциальные уравнения описывают процесс зарядки конденсатора (Рисунок 2) (ДУ 1-го порядка) и процесс передачи энергии от индуктивности к ёмкости (Рисунок 10) (ДУ 2-го порядка). Оба процесса происходят с потерями энергии, обусловленные наличием сопротивления в данных радиотехнических цепях.

Рассмотрены характеристики цепей, содержащиеся в дифференциальных уравнениях. ДУ 1-го порядка: $\alpha=1/RC$ - скорость заряда (разряда) конденсатор в данной радиотехнической цепи (Рисунок 3), $T=RC$ – постоянная времени (промежуток времени, в течение которого реакция схемы на единичный скачок (функция Хэвисайда) достигает $1-1/e=63,2\%$ от своего конечного значения) (Рисунок 3).

ДУ 2-го порядка: $\beta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания данной радиотехнической цепи (происходит процесс затухания колебаний и является следствием уменьшением энергии за счет выделения тепла на резисторе) (Рисунок 11), $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ частота собственных затухающих колебаний, где $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ -определяет частоту незатухающих (гармонических) свободных колебаний в контуре, если бы в нем не было потерь, $\tau = \frac{1}{\beta}$ - время, за которое амплитуда собственных затухающих колебаний уменьшается в e раз (Рисунок 11).

Путём использования дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка получена имитационная модель процессов в радиотехнических цепях. (Формула 11, 12, 21. Рисунок 2, 4. 10)